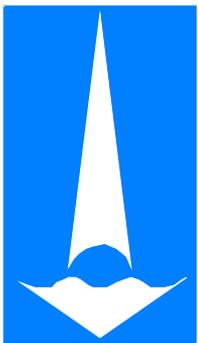


**Оценка эффективности одновременного
моделирования нескольких состояний
турбулентного течения на примере
задачи о прямом расчете турбулентного
обтекания массива кубов**



Б.И. Краснопольский

krasnopolsky@imec.msu.ru

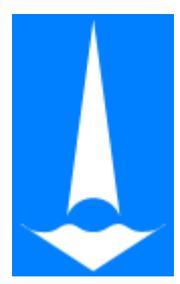
НИИ механики МГУ



Мотивация работы

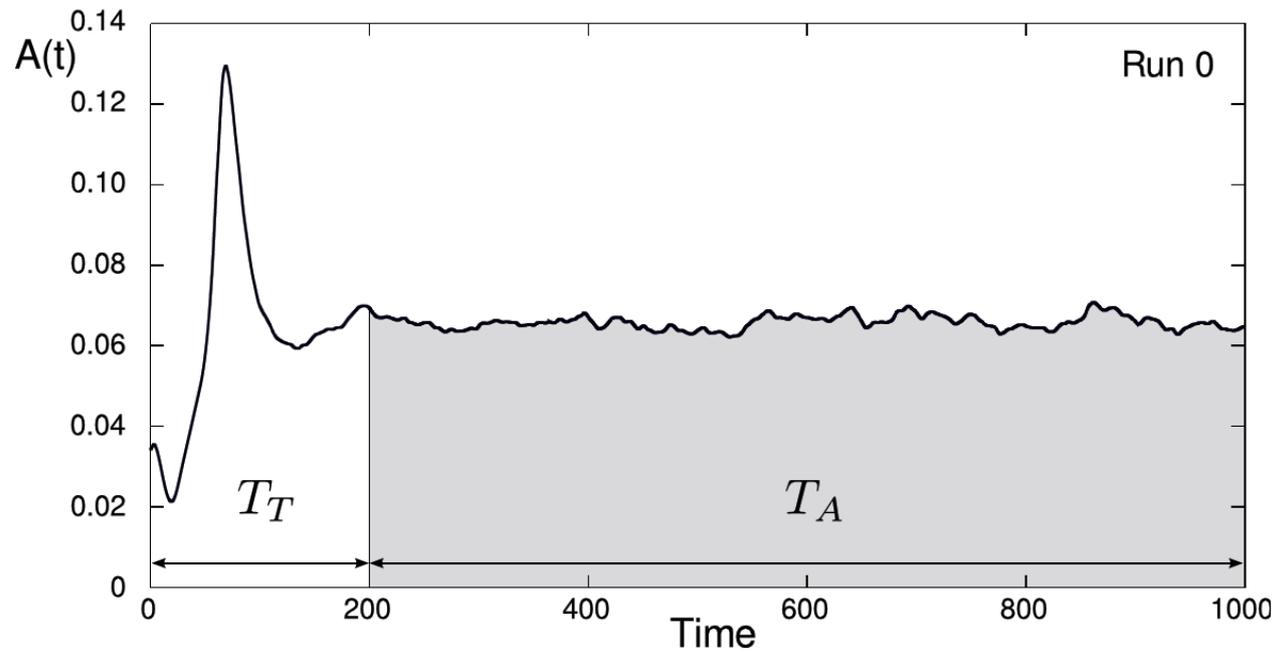
Для высокоточного моделирования турбулентных течений необходимы:

- **«Точные» математические модели (DNS / LES)**
- **Подробные расчетные сетки (10^6 - 10^{10} -...)**
- **Длительные времена интегрирования для осреднения турбулентных характеристик течения (10^4 - 10^8 шагов по времени)**



Типичный DNS / LES расчет (1)

Интегральная амплитуда возмущений скорости*:



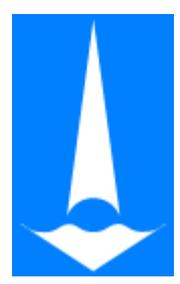
**Физическое время
расчета:**

$$T = T_T + T_A$$

Осреднение по времени

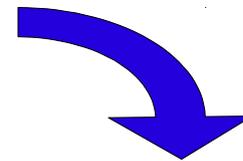
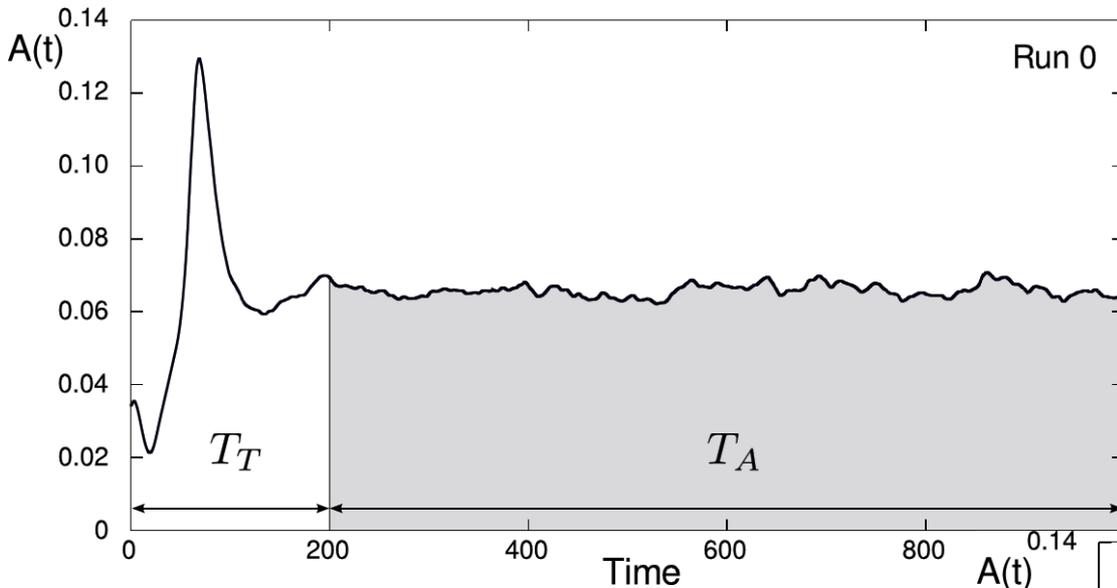
***Течение в прямой трубе круглого сечения, $Re_b = 6000$**

$$A(t) = \left(\frac{1}{V} \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle_z|^2 dV \right)^{1/2}, \quad \langle \mathbf{u} \rangle_z = \frac{1}{Z} \int_Z \mathbf{u} dz$$



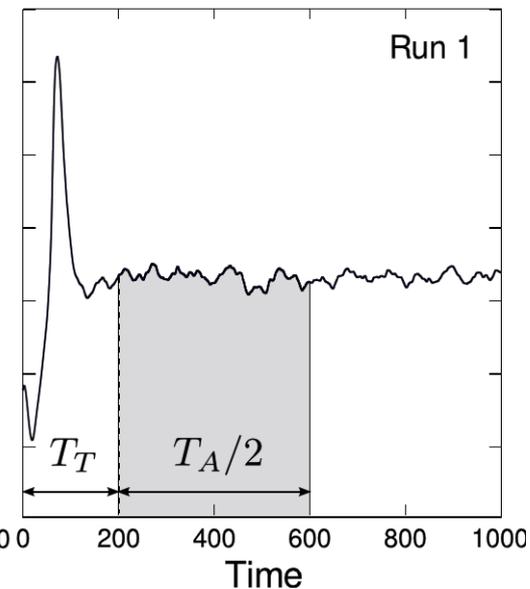
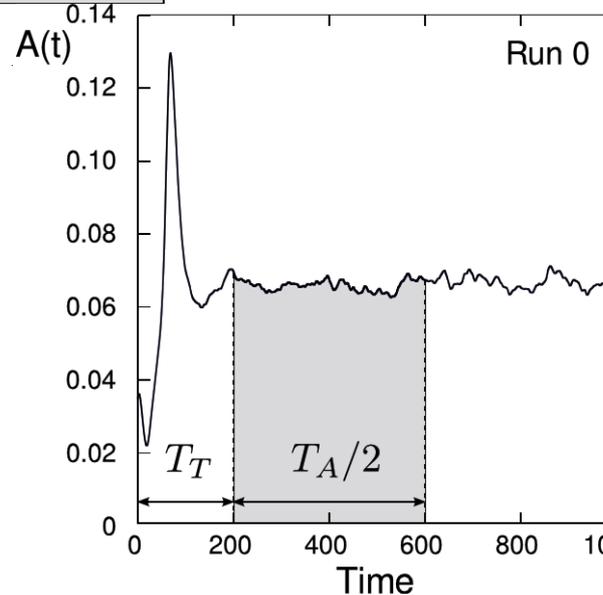
Типичный DNS / LES расчет (2)

Расчет с двумя различными начальными состояниями:

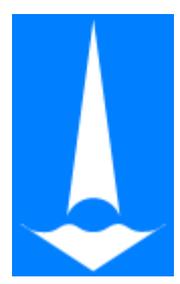


Общее время расчета:

$$T = 2(T_T + T_A/2)$$

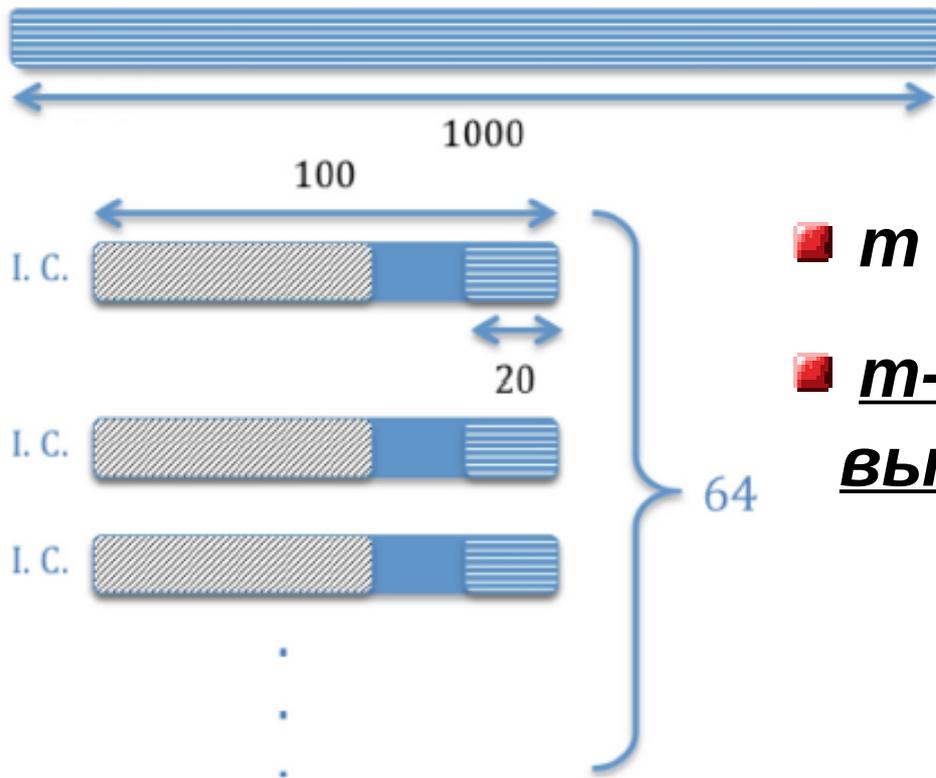
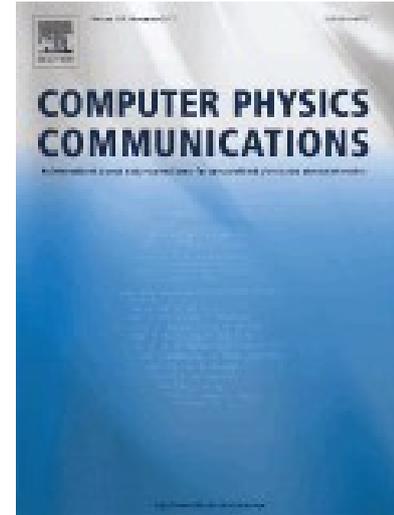


**Осреднение по времени
и по ансамблям**

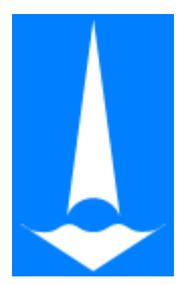


Текущие тенденции

V. Makarashvili, E. Merzari, A. Obabko, A. Siegel, P. Fischer.
A performance analysis of ensemble averaging for high fidelity turbulence simulations at the strong scaling limit //
Computer Physics Communications, Vol. 219, 2017, p. 236-245



- ***t* независимых расчетов**
- ***t*-кратный рост используемых вычислительных ресурсов!!!**



Численные методы для DNS / LES расчетов

Типичный набор методов для расчета несжимаемых течений:

- **Проекционные методы высоких порядков (схемы Рунге-Кутты 3-го порядка и выше)**

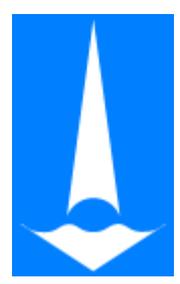
$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = - (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^n$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla p^{n+1}$$

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$$

- **Решение СЛАУ для давления – до 95% времени**
- **Матрица для давления неизменна в ходе всего расчета**



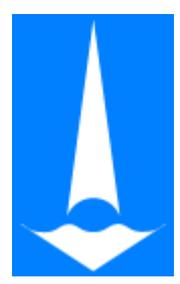


Решение СЛАУ для давления

Решение систем линейных алгебраических уравнений для давления

- **Эллиптическое уравнение**
- **Большие сильно-разреженные системы**
- **Итерационные методы: методы подпространства Крылова и / или многосеточные методы**
 - ◆ *CSR формат — de-facto стандарт для методов общего вида*
 - ◆ *SpMV — доминирующая операция*
 - ◆ *«Memory bound»-операция*
- **Умножение матрицы одновременно на несколько векторов (GSpMV) является существенно более эффективным по сравнению с одним вектором (SpMV)**





Резюме

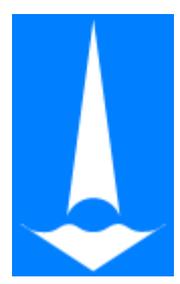
Если проводить несколько расчетов с разными начальными данными одновременно:

- Рост общего физического времени расчета по сравнению с расчетом одного состояния течения

+ Решение СЛАУ для давления с несколькими правыми частями



Можно ли таким образом ускорить расчет?..



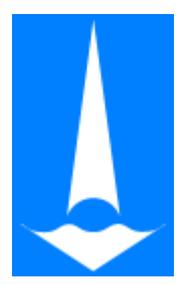
Теоретические оценки: DNS расчет (1)

Общее ускорение расчета можно определить как:

$$P_m = \frac{T_1}{T_m}$$

P_m – ускорение расчета за счет моделирования m -состояний течения

T_m – астрономическое время расчета задачи при моделировании m -состояний течения



Теоретические оценки: DNS расчет (2)

Астрономическое время расчета пропорционально количеству шагов по времени:

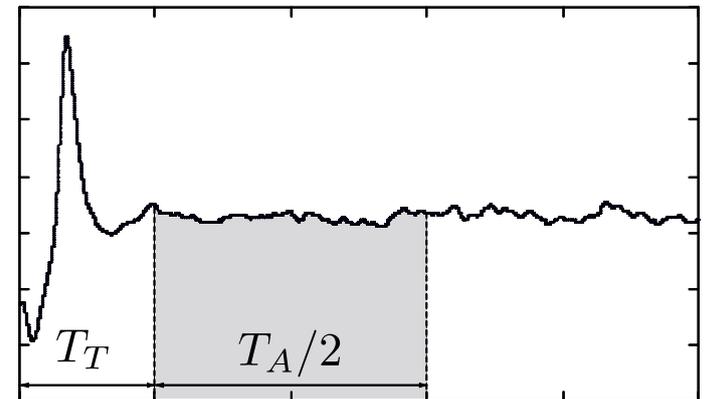
$$T_m = N_m t_m$$

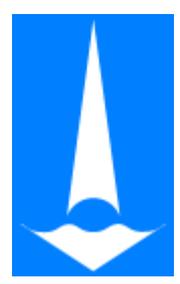
Количество шагов по времени пропорционально физическому времени расчета задачи:

$$N_m = \frac{T_m}{\tau}$$

Физическое время расчета определяется величиной интервала осреднения:

$$T_m = T_T + T_A/m$$





Теоретические оценки: DNS расчет (3)

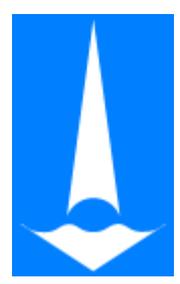
Время расчета одного шага:

$$t_m = t_m^S + t_m^D$$

↑ ↑
решение СЛАУ дискретизация

Время решения СЛАУ пропорционально времени операции $SrMV$ и объему считываемых данных из памяти:

$$t_m^S \sim \Sigma_m$$



Теоретические оценки: GSpMV

■ **Объем чтений/записей для GSpMV:**

$$\Sigma_m = 4n(2m + 1) + 12nnz + 8m \cdot nnz$$

■ **Выигрыш в объеме считываемых данных:**

$$\frac{m\Sigma_1}{\Sigma_m} = \frac{m(3 + 5C)}{2m(C + 1) + 3C + 1} \underset{C \gg 1}{\sim} \frac{5m}{2m + 3}$$

```
#define NV 4

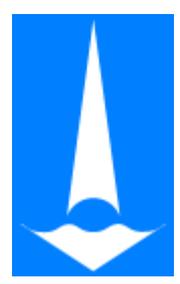
void GSpMV (CRS_type *M, double *X, double *Y)
{
    double sum[NV];

    for (int i = 0; i < M->nrows; i++)
    {
        for (int m = 0; m < NV; m++)
            sum[m] = 0.;

        for (int j = M->row[i]; j < M->row[i+1]; j++)
        {
            int col = M->col[j];
            double val = M->val[j];

            for (int m = 0; m < NV; m++)
                sum[m] += val * X[col*NV + m];
        }

        for (int m = 0; m < NV; m++)
            Y[i*NV + m] = sum[m];
    }
}
```



Теоретические оценки: параметры

$$P_m = \frac{1 + \beta}{m + \beta} \frac{5m}{5m - 3\theta(m - 1)}$$

Три параметра:

β

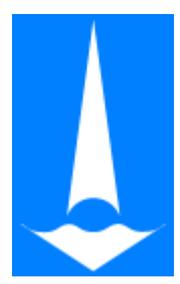
соотношение интервалов интегрирования по времени; определяется постановкой задачи, входящий параметр

θ

доля времени решения СЛАУ в общем времени расчета; определяется набором численных методов, входящий параметр

m

количество одновременно рассчитываемых состояний течения, свободный параметр



Теоретические оценки: предельные случаи

$$P_m = \frac{1 + \beta}{m + \beta} \frac{5m}{5m - 3\theta(m - 1)}$$

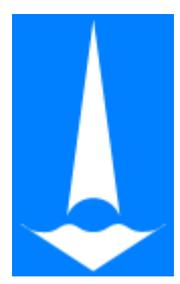
Предельные случаи:

$$\beta \ll 1 : P_m \approx \frac{5}{5m - 3\theta(m - 1)}$$

Интервал осреднения много меньше начального участка, ожидается замедление расчета

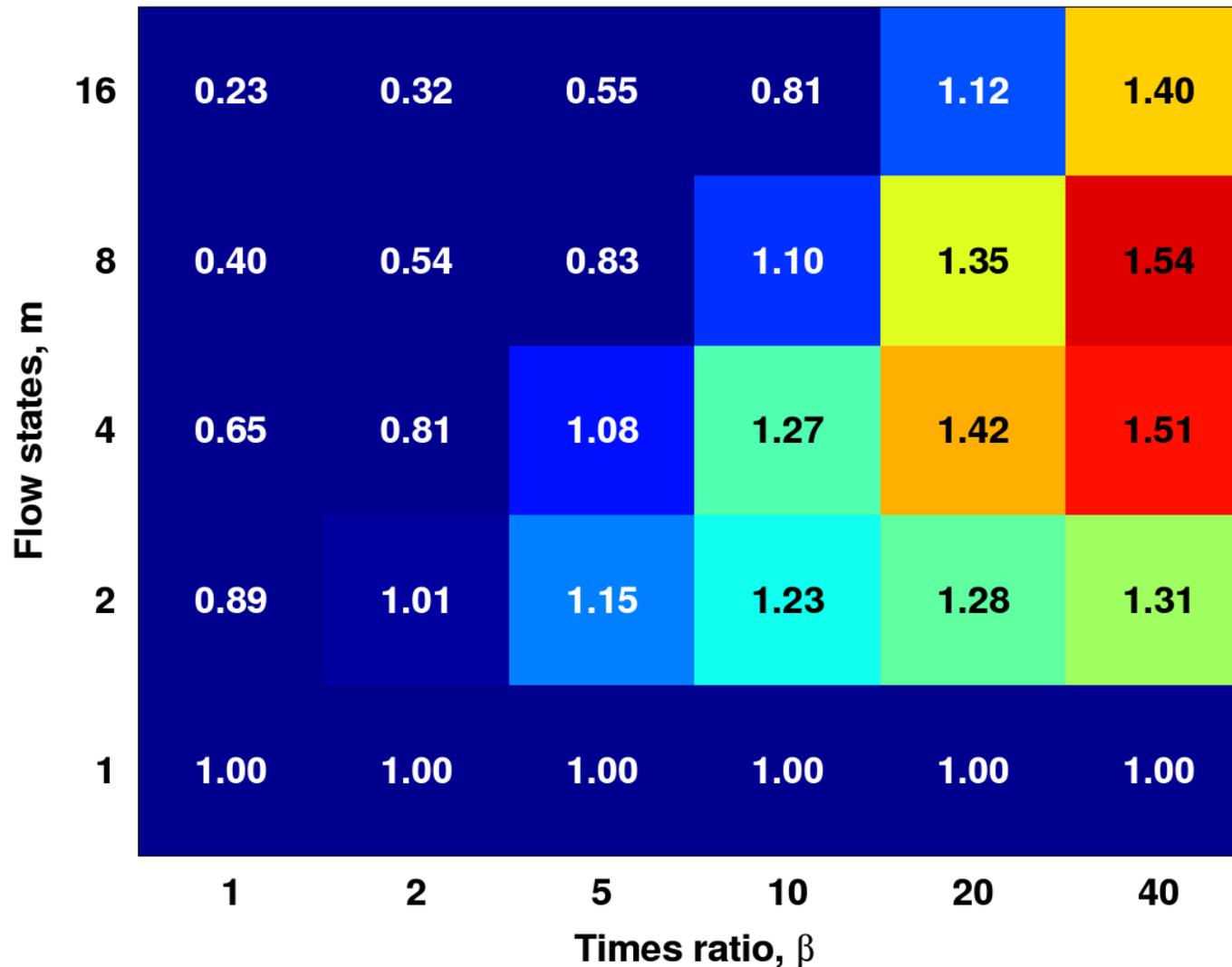
$$\beta \gg 1 : P_m \approx \frac{5m}{5m - 3\theta(m - 1)} \xrightarrow[\theta \rightarrow 1]{m \rightarrow \infty} 2.5$$

Интервал осреднения много больше начального участка, ожидается ускорение расчета

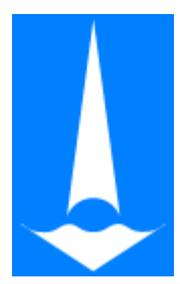


Теоретические оценки: общее ускорение расчета

Ожидаемое ускорение расчета как функция от количества одновременно моделируемых состояний



$$\theta = 0.85$$

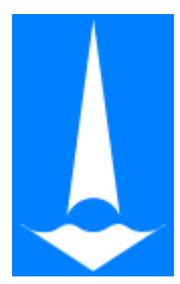


Вычислительные коды для расчетов

Программы:

- **Решение СЛАУ с несколькими правыми частями: реализация стабилизированного метода би-сопряженных градиентов с алгебраическим многосеточным предобуславливателем**
- **Вычислительный код для прямого численного моделирования турбулентных течений с возможностью одновременного расчета нескольких состояний течения***

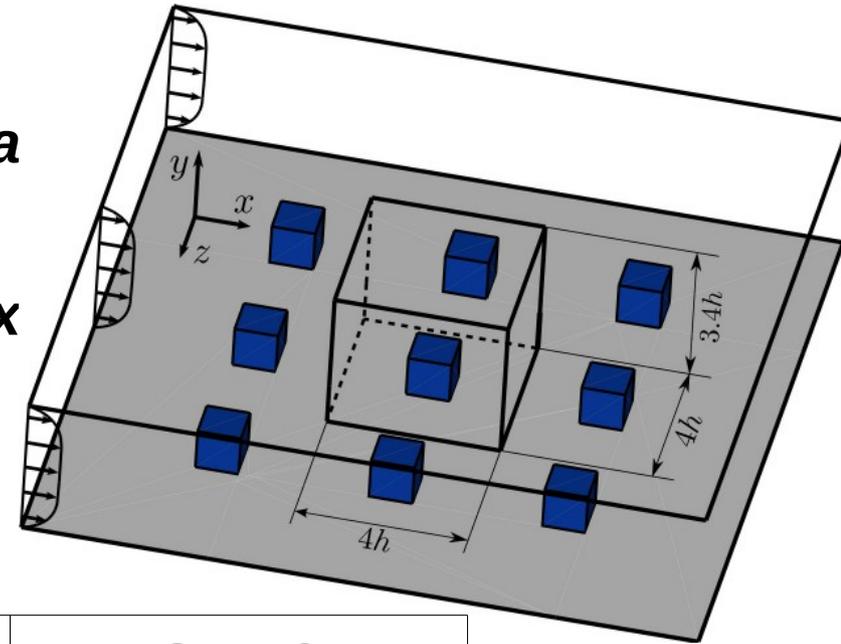
* N. Nikitin. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // JCP, 217(2), 759-781, 2006.



Тестовая задача

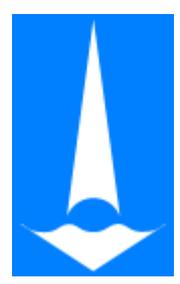
Обтекание массива кубов*:

- Условие прилипания на стенках канала и гранях куба
- Условие периодичности на боковых стенках
- Число Рейнольдса $Re_b = \frac{U_b h}{\nu} = 3854$



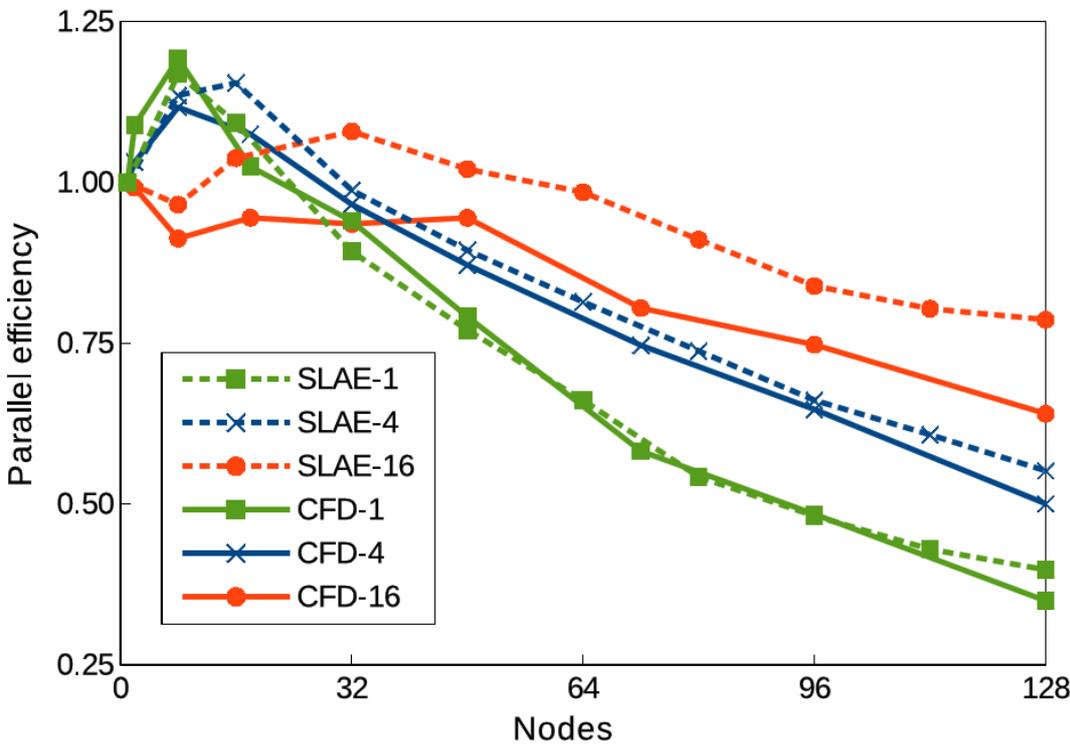
	Сетка 1	Сетка 2
Размер сетки	144 x 112 x 144	240 x 168 x 240
Сетка вокруг куба	52 x 38 x 52	100 x 74 x 100
h_x, h_z	0.0065h – 0.054h	0.0031h – 0.038h
h_y	0.0054h – 0.07h	0.003h – 0.044h
Общий размер сетки	2.32 млн	9.68 млн

* E. Meinders, K. Hanjalic, Vortex structure and heat transfer in turbulent flow over a wall-mounted matrix of cubes, *IJHFF*, 20 (3), 255-267, 1999.

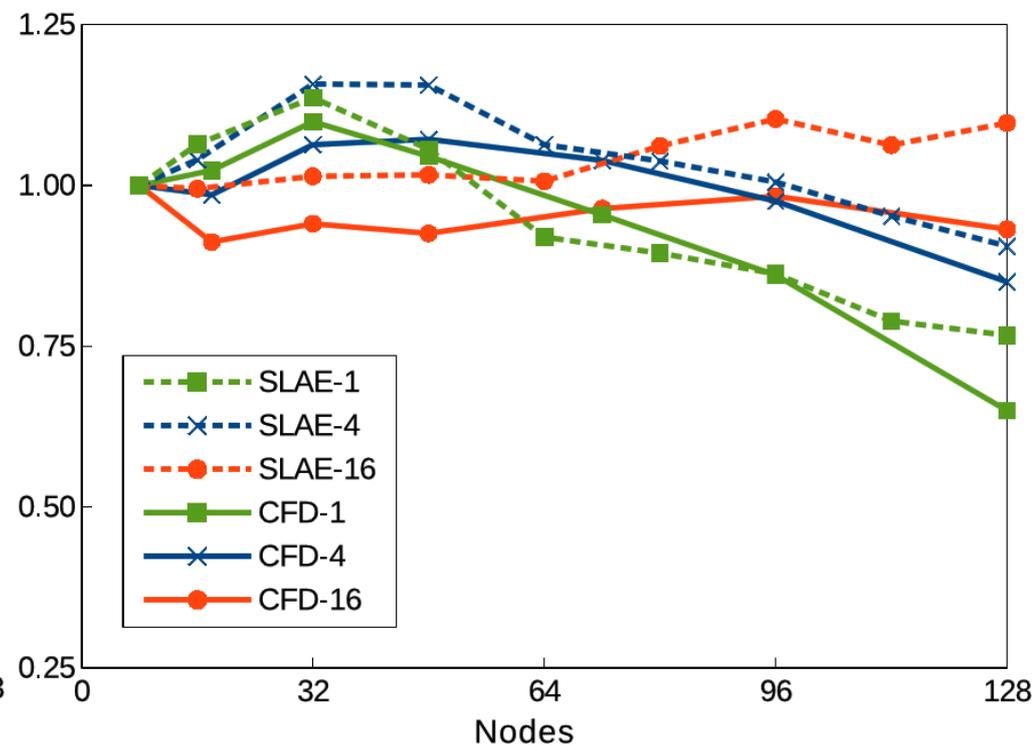


Расчет нескольких состояний, масштабируемость

**Эффективность распараллеливания для методов
решения СЛАУ и расчета течения в целом:**

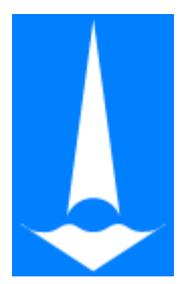


Сетка 1



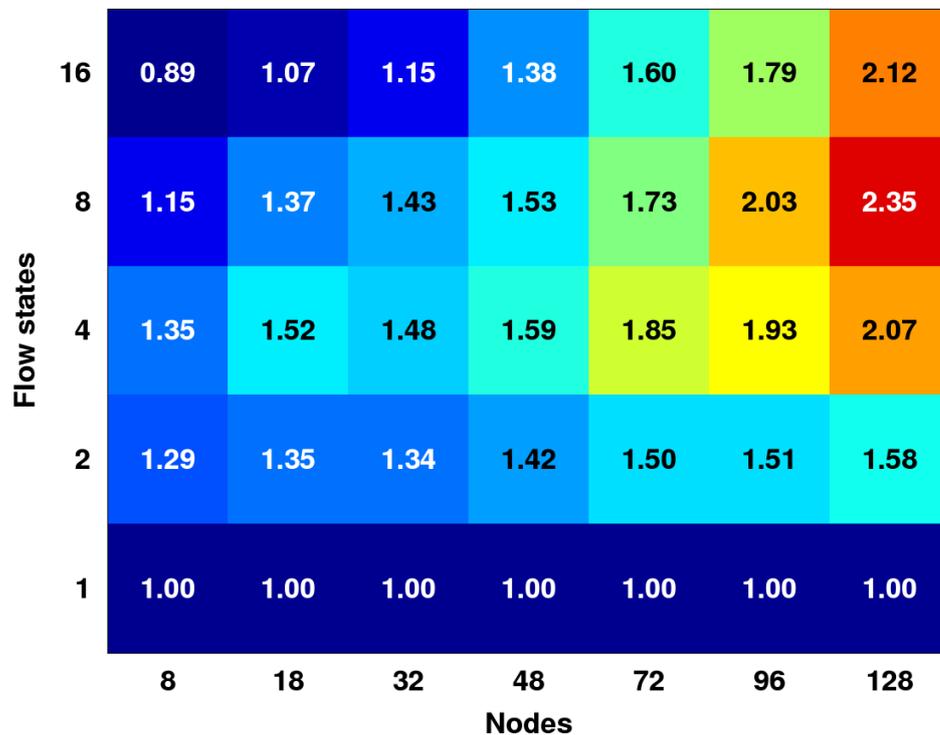
Сетка 2

Параллельная эффективность: $K_p = T_1 / (pT_p)$



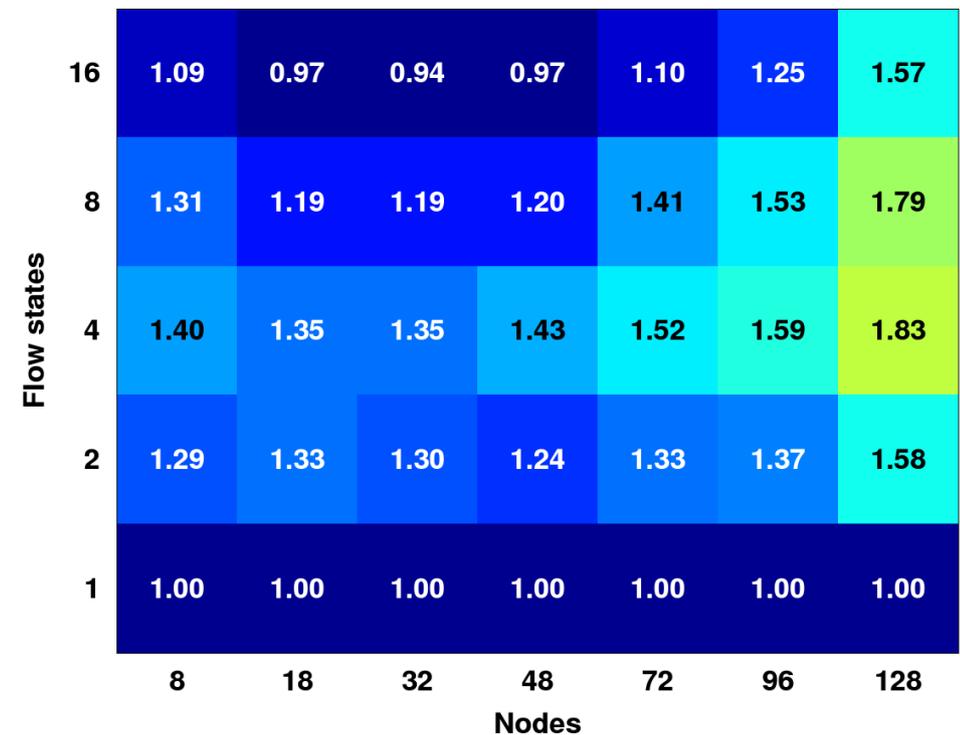
Расчет нескольких состояний, уточненная оценка

Результаты исследований масштабируемости можно использовать для уточнения оценки



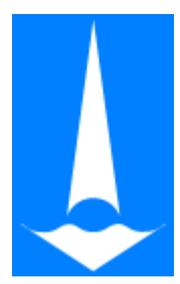
Сетка 1

$$\beta = 20$$



Сетка 2

$$P_m = \frac{1 + \beta}{m + \beta} \frac{5m}{5m - 3\theta(m - 1)}$$



Обтекание массива кубов, времена расчета

Общее время расчета:

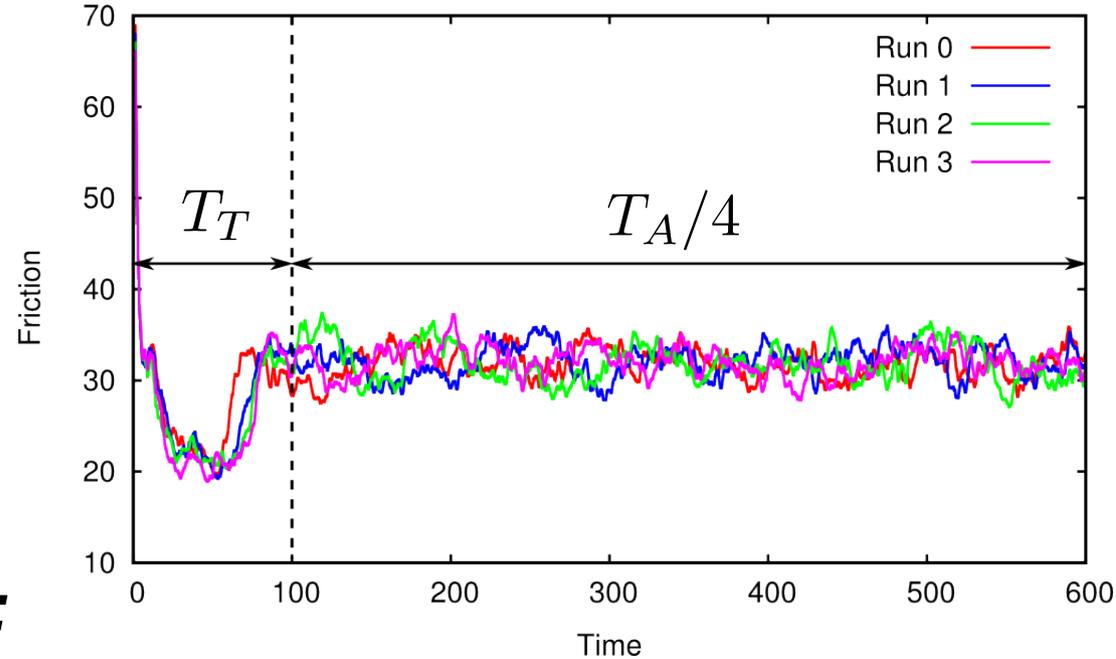
$$T_T = 100 \quad T_A = 2000$$

↓

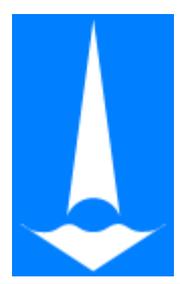
$$\beta = 20$$

$$T_1 = 2100 \quad T_4 = 600 \quad T_8 = 350$$

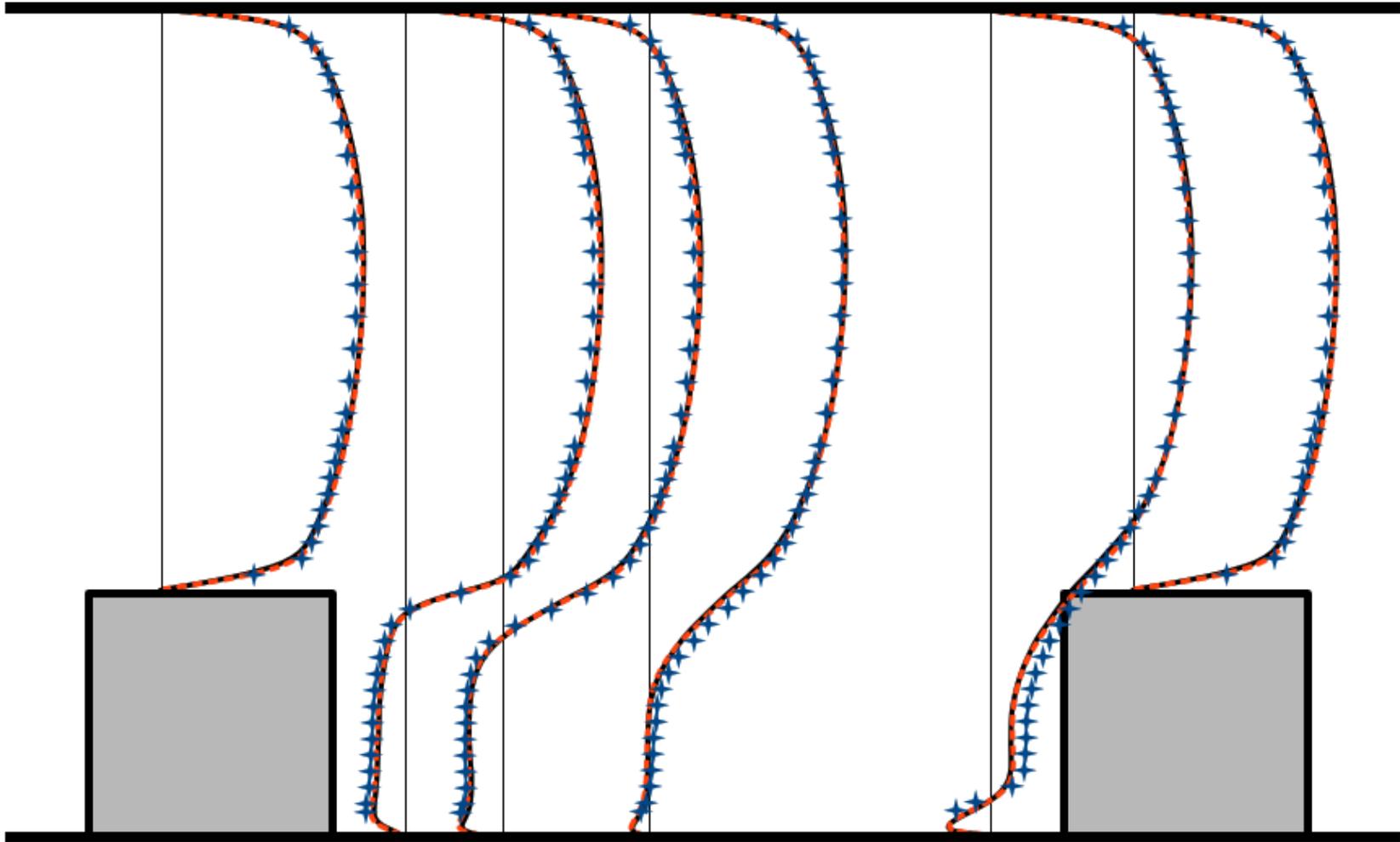
Расчетные конфигурации:



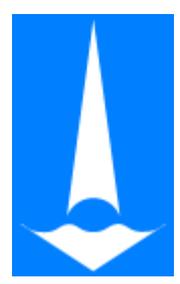
	Узлы	m	Время расчета, мин	Базовая оценка	Уточненная оценка	Фактическое ускорение
Сетка 1	32	1	936	-	-	-
	32	4	640	1.42	1.48	1.46
	96	8	320		3*	2.95*
Сетка 2	72	1	4011	-	-	-
	72	4	2625	1.42	1.52	1.53



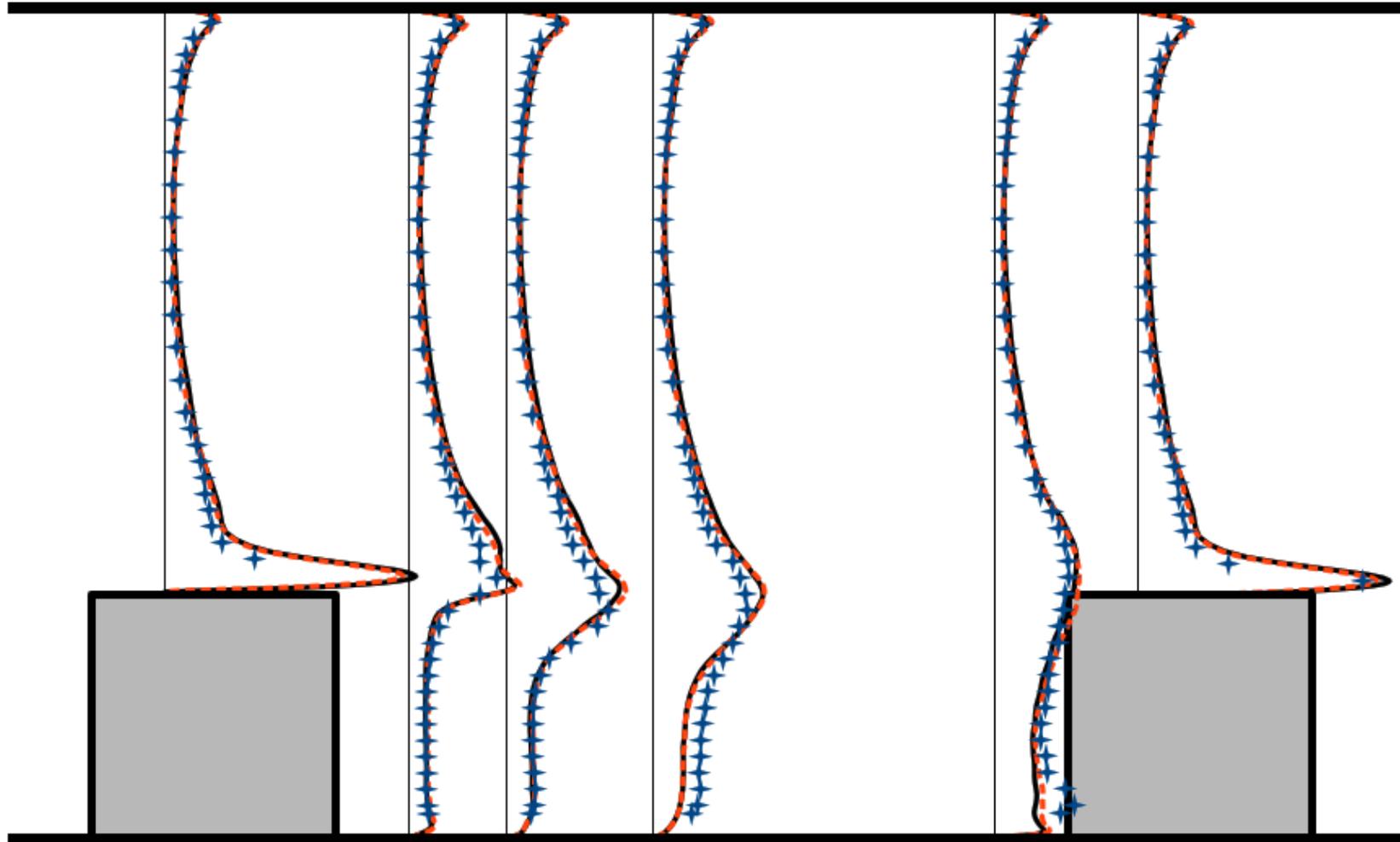
Обтекание массива кубов, сравнение результатов (1)



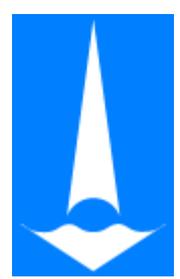
Распределение продольной компоненты средней скорости



Обтекание массива кубов, сравнение результатов (2)

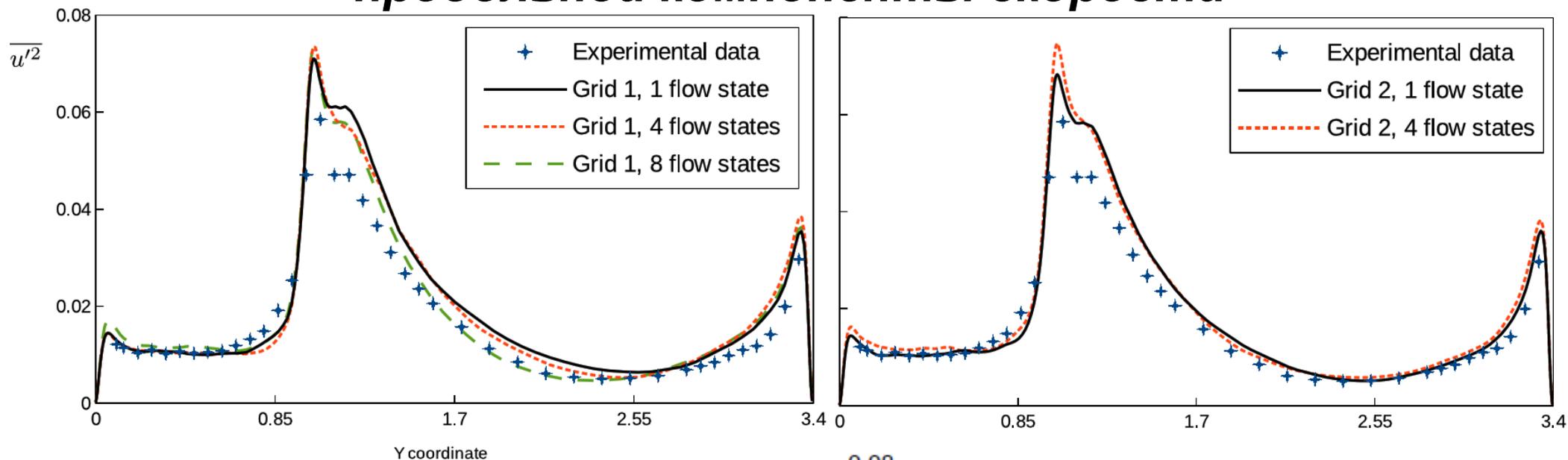


Распределение среднеквадратичной амплитуды пульсаций продольной компоненты скорости

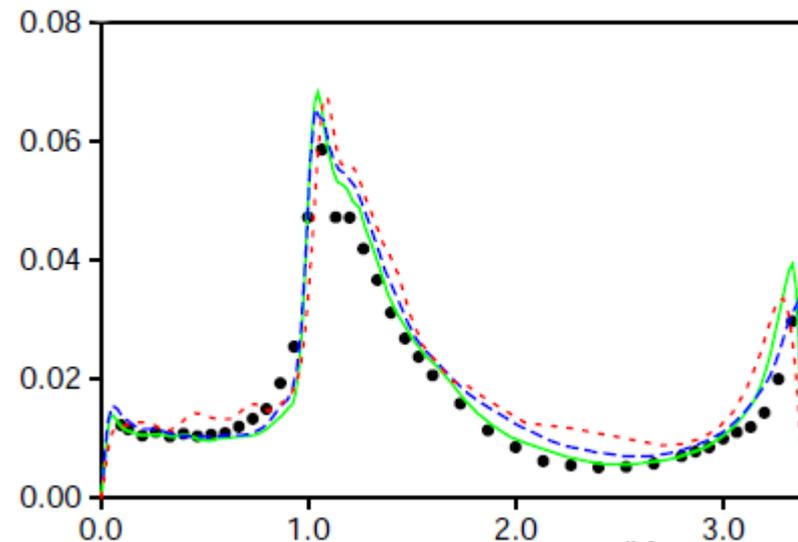


Обтекание массива кубов, сравнение результатов (3)

Распределение среднеквадратичной амплитуды пульсаций продольной компоненты скорости



Распределение по высоте канала на расстоянии $x=0.3h$ от задней кромки куба





Заключение

- Предложен модифицированный алгоритм расчета турбулентных течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на одновременном расчете нескольких состояний течения (осреднение по ансамблям)
- Представлены теоретические оценки, демонстрирующие потенциал и область применимости предложенного подхода
- Для тестовой задачи обтекания массива кубов получено 1.5-кратное сокращение общего времени расчета за счет одновременного моделирования и осреднения по нескольким реализациям течения

Спасибо за внимание!

**Некоторые картинки были взяты с www.cliparts.co*