Параллельная реализация адаптивной многошаговой схемы редукции размерности для задач глобальной оптимизации*

В.А. Гришагин, Р.А. Исрафилов

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского

Рассматриваются сложные многоэкстремальные многомерные задачи глобальной оптимизации и предлагается новый параллельный алгоритм их решения, основанный на адаптивной многошаговой схеме редуцирования размерности. Дается краткое описание алгоритма и способов реализации параллелизма. Приводятся результаты вычислительных экспериментов на известном классе многоэкстремальных функций GKLS, который является классическим для тестирования алгоритмов глобального поиска. Результаты экспериментов на выборках функций разных размерностей демонстрируют значительное ускорение поиска при использовании параллельной адаптивной схемы по сравнению с ее последовательным прототипом.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, многоэкстремальные задачи, редукция размерности, параллельная адаптивная схема.

1. Введение

Модели принятия оптимальных решений, формулируемые как задачи математического программирования, охватывают широкий класс прикладных задач в различных областях индустрии, экономики, научных исследований и др. Среди данных моделей одними из наиболее сложных являются многоэкстремальные задачи оптимизации, в которых требуется найти глобальный оптимум при наличии многоэкстремальности целевой функции и ограничений на выбор параметров задачи. Ключевым фактором, определяющим сложность задач данного класса, является размерность (количество варьируемых параметров), поскольку с увеличением размерности вычислительная сложность существенно многоэкстремальных задач может иметь экспоненциальный характер роста [1]. Эффективность методов решения таких задач в значительной степени основана на качественном использовании информации о свойствах решаемой задачи, как априорной, доступной до начала поиска оптимума, так и апостериорной, которую метод получает в процессе оптимизации [1-3]. В частности, для класса задач с целевой функцией, удовлетворяющей условию Липшица, разработано довольно много методов, учитывающих данное свойство тем или иным способом. Среди основных подходов к конструированию методов липшицевой оптимизации можно отметить подход, основанный на построении минорант [28], информационно-статистический подход [1-3], различные варианты компонентных подходов (методов разбиений) [10, 26, 27] , использование множественных оценок констант Липшица [23, 25].

Для задач оптимизации многомерных липшицевых функций также предложены эффективные методы, основанные на идеях редукции размерности, когда исходная многомерная задача заменяется решением одной или нескольких одномерных подзадач. В настоящее время развиваются два основных подхода к редукции размерности. Один из таких подходов базируется на применении так называемых кривых Пеано, непрерывно отображающих многомерный гиперкуб на отрезок вещественной оси [1-3, 7, 15, 16, 24, 29, 31]. Другой подход использует схему вложенной (многошаговой) одномерной оптимизации, редуцирующей многомерную задачу к семейству рекурсивно связанных одномерных подзадач [2, 3, 8, 9, 14, 17-20, 32]. Достоинством данных подходов является возможность применения для решения многомерных задач одномерных алгоритмов глобального поиска, которые являются достаточно простыми, теоретически обоснованными и эффективными.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда в рамках проекта № 15-11-30022 "Глобальная оптимизация, суперкомпьютерные вычисления и приложения".

Кроме того, указанные схемы редукции размерности обладают значительным потенциалом параллелизма, что позволяет строить на их основе параллельные методы глобальной оптимизации с высокой степенью распараллеливания их вычислительных структур. Примеры таких алгоритмов, их теоретическое обоснование и оценки эффективности могут быть найдены в публикациях [1, 3-6, 20, 21, 30, 31]. Следует отметить, что данные алгоритмы с целью повышения эффективности ориентированы на использование всей апостериорной (полученной в ходе поиска) информации при планировании процесса оптимизации, что порождает существенные информационные связи между различными компонентами алгоритмов. Данная особенность не позволяет изначально разделить их на независимые параллельно исполняемые части, что является широко известным способом распараллеливания в алгоритмах глобального поиска на основе простых регулярных и случайных Монте-Карло сеток, применения многостартовых схем локальной оптимизации или разбиения области поиска на несколько независимых подобластей, и требует разработки иных принципов параллелизации, учитывающих связи между параллельно исполняемыми компонентами.

Основной принципиальной проблемой, на решение которой нацелена данная работа, являлось расширение спектра эффективных параллельных алгоритмов для решения задач глобальной оптимизации на основе применения адаптивной схемы редукции размерности.

В настоящей работе предлагается один из возможных способов распараллеливания адаптивной многошаговой схемы редукции размерности, ранее представленной только в последовательном варианте [13]. Описывается вычислительная схема параллельной адаптивной схемы редукции, приводятся результаты вычислительных экспериментов на многопроцессорном кластере, подтверждающие перспективность исследований в данном направлении.

2. Многошаговая схема редукции размерности

Рассматривается задача

$$F(z) \to \min,\ z \in Z \subseteq E^n, \tag{1}$$

поиска глобального минимума функции нескольких переменных $F(z),\ z = (z_1, \dots, z_n)$, в гиперпараллелепипеде

$$Z = \{z \in R^n : a_j \le z_j \le b_j, 1 \le j \le n\} \tag{2}$$

n-мерного Евклидова пространства E^n.

Предполагается, что целевая функция $F(z)$ в области Z удовлетворяет условию Липшица

$$|F(z') - F(z'')| \le L\, \|z' - z''\|,\ z', z'' \in Z, \tag{3}$$

с положительной константой Липшица L в евклидовой норме $\|\cdot\|$.

Данная постановка является традиционной для задач глобальной оптимизации, поскольку, с одной стороны, условие Липшица в общем случае обеспечивает многоэкстремальность целевой функции, а с другой стороны позволяет оценить точность отыскания решения по конечному числу испытаний (вычислений оптимизируемой функции).

Одним из возможных подходов к построению алгоритмов решения многомерных задач рассматриваемого класса является подход, основанный на использовании соотношения [2, 8]

$$\min_{z \in Z} F(z) = \min_{z_1 \in [a_1, b_1]} \min_{z_2 \in [a_2, b_2]} \dots \min_{z_n \in [a_n, b_n]} F(z), \tag{4}$$

которое позволяет заменить решение многомерной задачи (1)-(2) решением семейства одномерных подзадач. Кратко проиллюстрируем идею такой редукции.

Введем семейство функций, определяемых рекуррентно, следующим образом. Вначале положим

$$F^n(z) \equiv F(z). \tag{5}$$

Далее определим функции семейства через операцию минимизации, редуцирующую размерность, как

$$F^m(z_1, \dots, z_m) = \min_{z_{m+1} \in [a_{m+1}, b_{m+1}]} F^{m+1}(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}),\ 1 \le m \le n-1. \tag{6}$$

Тогда согласно (4)-(6)

$$\min_{z \in Z} F(z) = \min_{z_1 \in [a_1, b_1]} F^1(z_1),$$

и для решения многомерной задачи (1) достаточно решить одномерную задачу

$$F^1(z_1) \to \min,\ z_1 \in [a_1, b_1]. \tag{7}$$

Но при решении данной задачи необходимо вычислять значения функции $F^1(z_1)$ в точках отрезка $[a_1, b_1]$, а каждое такое вычисление в точке z_1 требует решения задачи

$$F^2(z_1, z_2) \to \min,\ z_2 \in [a_2, b_2], \tag{8}$$

которая является одномерной, поскольку координата z_1 фиксирована и т.д. вплоть до решения задачи

$$F^n(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n) \to \min,\ z_n \in [a_n, b_n], \tag{9}$$

которая тоже является одномерной, поскольку координаты $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ заданы на предыдущих уровнях порождения подзадач (6) и для задачи (9) являются фиксированными. Процесс порождения подзадач на этом заканчивается, поскольку в задаче (9) целевой функцией является функция $F(z)$ исходной многомерной задачи.

Решение многомерной задачи (1)-(2) посредством решения взаимосвязанных одномерных подзадач системы (7)-(9) называется многошаговой схемой редукции размерности, или схемой вложенной оптимизации.

В монографии [2] показано, что при условии липшицевости (3) для функции $F(z)$ все редуцированные функции $F^j(z_1, \ldots, z_j)$ из (6) также удовлетворяют условию Липшица с той же самой константой L.

Многошаговая схема редукции порождает иерархическую систему подзадач, образующую структуру типа «дерево» с n уровнями, где задача (7) является корневой, а задачи (9) – «листьями» дерева. В классической многошаговой схеме, ставшей источником многих известных алгоритмов глобального поиска (см., например, работы [3, 9, 14, 17, 19, 30]), на одном и том же уровне новая одномерная подзадача порождается только после завершения инициированной ранее подзадачи этого уровня. Это означает, что в каждый момент реализации многошаговой схемы в процессе решения находятся не более n одномерных задач, причем задачи, порожденные позднее, никак не используют поисковую информацию, полученную в ходе решения уже завершенных задач своего уровня. Этот недостаток преодолевает адаптивная схема редукции размерности, предложенная в работе [13] как обобщение классической многошаговой редукции.

Основная идея адаптивной схемы состоит в одновременном рассмотрении всех одномерных подзадач и выборе для продолжения вычислений наиболее перспективной из них. Детальное описание адаптивной схемы и теоретическое обоснование сходимости к глобальному оптимуму задачи (1) дано в [13], а в работе [18] приведены результаты оценки ее эффективности в сравнении как с прототипом - классической многошаговой схемой, так и с другими известными алгоритмами многоэкстремальной оптимизации.

Выбор наиболее перспективной задачи адаптивной схемы осуществляется через применение характеристического подхода, применявшегося ранее при конструировании решающих правил алгоритмов глобального поиска [21, 22]. В рамках этого подхода каждой подзадаче адаптивной схемы в зависимости от доступной для этой задачи поисковой информации назначается некоторая количественная оценка ее «качества», называемая характеристикой задачи, и для продолжения оптимизации выбирается задача с набольшей характеристикой.

Проиллюстрируем возможность построения характеристики одномерной подзадачи в случае, когда для ее решения применяется информационно-статистический алгоритм глобального поиска (АГП), предложенный Р.Г.Стронгиным [2]. С этой целью введем некоторую обобщенную форму описания одномерных подзадач (7)-(9)

$$f(z) \to \min,\ z \in [a, b] \tag{10}$$

(липшицевых с константой L) и кратко опишем вычислительную схему АГП.

Два первых испытания z^1, z^2 реализуются на концах отрезка $[a,b]$, т.е. $z^1 = a, z^2 = b,$ с вычислением значений функции $g^1 = f(a), g^2 = f(b).$

Пусть проведено $k \geq 2$ испытаний в точках $z^1, z^2, \ldots, z^k$ и получены значения $g^1, g^2, \ldots, g^k$, где $g^j = f(z^j), 1 \leq j \leq k$.

Для получения точки z^{k+1} нового $(k+1)$-го испытания выполняются следующие действия.

1. Все точки совершенных испытаний упорядочиваются по возрастанию и образуют множество

$$\Omega = \{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \xi_k\} \tag{11}$$

в котором $\zeta_1 = a, \zeta_k = b$, а также порождают множество значений $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k\}$, таких, что $\psi_j = f(\zeta_j), 1 \leq j \leq k$.

2. Каждому интервалу $(\zeta_{j-1}, \zeta_j), 2 \leq j \leq k,$ на которые отрезок $[a,b]$ разбивается точками множества (11), ставится в соответствие число

$$Q(j) = \mu(\zeta_j - \zeta_{j-1}) + \frac{(\psi_j - \psi_{j-1})^2}{\mu(\zeta_j - \zeta_{j-1})} - 2(\psi_{j-1} + \psi_j) \tag{12}$$

называемое характеристикой интервала, и выбирается интервал $(\zeta_{s-1}, \zeta_s), 2 \leq s \leq k,$ с максимальной характеристикой:

$$Q(s) = \max_{2 \leq j \leq k} Q(j) \tag{13}$$

3. Очередное испытание проводится в интервале в точке

$$z^{k+1} = \frac{\zeta_s + \zeta_{s-1}}{2} - \frac{\psi_s - \psi_{s-1}}{2\mu} \tag{14}$$

в которой вычисляется значение $g^{k+1} = f(z^{k+1})$.

В выражениях (12), (14) величина μ является параметром метода, который при выполнении условия $\mu > 2L$, где L - константа Липшица целевой функции задачи (10), обеспечивает сходимость ко всем глобальным минимумам функции $f(z)$ на отрезке $[a,b]$ (см. [1-3]).

Описанную схему решающего правила АГП по выбору точки нового испытания можно дополнить условием остановки вида

$$\zeta_s - \zeta_{s-1} < \delta, \tag{15}$$

где номер s определяется условием (13), т.е. прекращать испытания, когда длина интервала с максимальной характеристикой станет меньше заданной точности $\delta > 0$.

Если в адаптивной схеме все подзадачи решаются с помощью АГП, тогда в качестве характеристики каждой задачи выбирается ее максимальная интервальная характеристика (13).

3. Параллельная адаптивная схема редукции

Многошаговая редукция размерности обладает существенным потенциалом параллелизма, и для классической схемы разработаны различные варианты ее эффективного распараллеливания (см. [3, 5, 20, 21, 30]). В то же время адаптивная схема до настоящего времени изучалась только в последовательной реализации, в связи с этим принципиальной проблемой, на решение которой нацелена данная работа, является расширение спектра эффективных параллельных алгоритмов глобального поиска на основе применения параллельной адаптивной схемы оптимизации.

Гибкая структура адаптивной схемы предоставляет различные возможности для применения архитектурных и программных средств ее распараллеливания. В настоящей работе представлен один из возможных вариантов как первый шаг в данном направлении.

Дадим краткое описание предлагаемой параллельной версии адаптивной схемы.

Все вычисления, проводимые в рамках адаптивной многошаговой схемы редукции размерности, можно разбить на два этапа: *этап инициализации* и *стадия параллельного решения* порождаемых одномерных подзадач.

Целью этапа инициализации является создание начального множества подзадач, которое служит исходным множеством задач для начала параллельной стадии. В текущей реализации этап инициализации производится последовательно. Распараллеливание процедуры инициализации возможно, однако, несомненно больший интерес представляет параллельная стадия, поскольку на неё уходит основная часть времени работы схемы, на инициализацию в среднем тратится не более 1% от всего времени.

Инициализация состоит в применении классической вложенной схемы к целевой функции с количеством итераций на каждом уровне не более заданной величины *K*. В результате генерируется некоторое начальное множество $T^0=\{f_1^0,\dots,f_{k(0)}^0\}$ подзадач $f_j^0,\ 1\le j\le k(0)$, системы (7)-(9).

Далее осуществляется переход к параллельной стадии, общая схема которой может быть описана следующим образом в предположении об использовании на каждой параллельной итерации пула из $p>1$ процессоров.

1. Установить номер параллельной итерации $q=1$.
2. Для каждой одномерной задачи $f_j^{q-1},\ 1\le j\le k(q-1)$, текущего множества подзадач $T^{q-1}=\{f_1^{q-1},\dots,f_{k(q-1)}^{q-1}\}$ вычислить максимальную характеристику (13) и установить значение данной характеристики в качестве характеристики задачи f_j^{q-1}.
3. Упорядочить все задачи множества T^{q-1} в порядке убывания их характеристик.
4. В множестве T^{q-1} выбрать p задач с максимальными характеристиками и назначить каждой задаче один из имеющихся процессоров.
5. В выбранных задачах вычислить точки новых испытаний согласно (14) и инициировать параллельное вычисление значений целевых функций данных задач с помощью назначенных процессоров.
6. В процессе выполнения пункта 5 процессор с номером $i, 1\le i\le p,$ генерирует множество T_i^q новых одномерных подзадач. По завершении работы всех процессоров корректируется информация подзадач множества T^{q-1} и формируется множество подзадач $T^q=T^{q-1}\cup T_1^q\cup\dots\cup T_p^q$.
7. Если выполнено условие остановки (15) в корневой задаче (7), вычисления заканчиваются; в противном случае номер итерации q увеличивается на единицу и реализуется переход к п.2.

В данной схеме в рамках параллельной итерации каждый процессор реализует решение семейства (вложенных) одномерных подзадач оптимизации. Рассмотрим более подробно данную ситуацию. Пусть в соответствии с п.4 общей схемы выбрана задача минимизации функции $F^j(z_1,\dots,z_{j-1},z_j)$ по координате z_j и требуется в соответствии с п. 3 одномерного метода АГП вычислить значение в некоторой точке $z_j=\tilde{z}_j$. Вычисление данного значения назначенным процессором состоит в решении семейства одномерных задач

$$F^i(z_1,z_2,\dots,z_{i-1},z_i)\to\min,\ z_i\in[a_i,b_i],\ j<i\le n, \tag{16}$$

в каждой из которых значения координат $z_1,\dots,z_{i-1}$ фиксированы (заданы задачами предшествующих уровней рекурсии). Таким образом, решение задач (16) порождает некоторое поддерево общего дерева одномерных подзадач, в котором задача $F^j(z_1,\dots,z_{j-1},z_j)$ является корневой, и каждый процессор параллельно с другими строит свое поддерево.

Описанная выше параллельная схема является синхронной, однако время выполнения вычислений при построении семейства (16) может отличаться существенно, и процессоры, которые уже выполнили итерацию для своей задачи, могут простаивать в ожидании завершения работы других процессоров.

Для решения этой проблемы реализован асинхронный механизм распределения задач. При рассмотрении асинхронизма не имеет смысла говорить об итерациях, выполняемых всей схемой совместно — каждый процессор выполняет итерацию, не дожидаясь окончания выполнения итераций других процессоров. Предположим, что i-й процессор по завершении своей j_i-й итерации (здесь используется двойная индексация j_i, поскольку каждый из процессоров может находиться на итерациях со своим номером) свободен для продолжения работы. В этот момент все задачи могут быть разделены на две группы: задачи, которые относятся к поддеревьям, формируемым остальными (работающими) процессорами - несвободные задачи, и остальные задачи, которые являются свободными. В этом случае множество задач $T_i^{j_i}$, порожденных i-м процессором на завершенной итерации j_i, добавляется к множеству свободных задач, а затем среди свободных задач выбирается задача с максимальной характеристикой и передается i-му процессору для выполнения новой итерации.

Принципиальные трудности при реализации параллелизма состояли в организации хранения информации, описывающей состояние одномерных подзадач, и обеспечения сложных связей между ними в рамках многомерной схемы. Проблема была решена посредством распределенного по процессорам хранения подзадач и динамическим изменением данного распределения в процессе появления новых подзадач. При этом на каждом процессоре в качестве структуры хранения использовалась очередь с приоритетами по характеристикам подзадач. Подобная схема позволила избежать значительных обменов данными между процессорами, замедляющих процесс реализации многомерного алгоритма.

4. Вычислительные эксперименты

Для оценки эффективности предложенного подхода к распараллеливанию адаптивной схемы был проведен вычислительный эксперимент по решению многомерных многоэкстремальных задач широко известного тестового класса глобальной оптимизации GKLS [12] как последовательной, так и асинхронной параллельной адаптивной схемой. Вычисления проводились на кластере, состоявшем из 4 узлов с 4-мя процессорами Intel® Xeon® E7-8890 v4 и 24 ядрами на каждом процессоре. Реализация параллелизма была выполнена на основе MPI, версия Intel® MPI 2017. MPI ранки были распределены таким образом, чтобы на каждом узле оказалось их равное количество. В качестве интерконнектора использовался Infiniband FDR.

Были использованы выборки из 50 функций размерности 7 и 10 функций размерности 8. Среднее время решения одной задачи выборки и полученное ускорение представлены в Таблицах 1 и 2. Рис.1 содержит графики ускорений по времени параллельной схемы по сравнению с последовательной в зависимости от числа MPI ранков.

Таблица 1. Среднее время и ускорение при решении задач размерности 7

GKLS 7D	**Количество MPI ранков**							
	1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**
Время, сек	621.9	408.8	196.4	96.6	48.5	24.6	14.3	10.1
Ускорение	1	1.5	3.2	6.4	12.8	25.3	43.4	61.3

Таблица 2. Среднее время и ускорение при решении задач размерности 8

GKLS 8D	Количество MPI ранков							
	1	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**
Время, сек	8376.6	6737.9	3740.5	1904.0	674.3	321.4	163.9	91.1
Ускорение	1	1.2	2.2	4.4	12.4	26.1	51.1	91.9

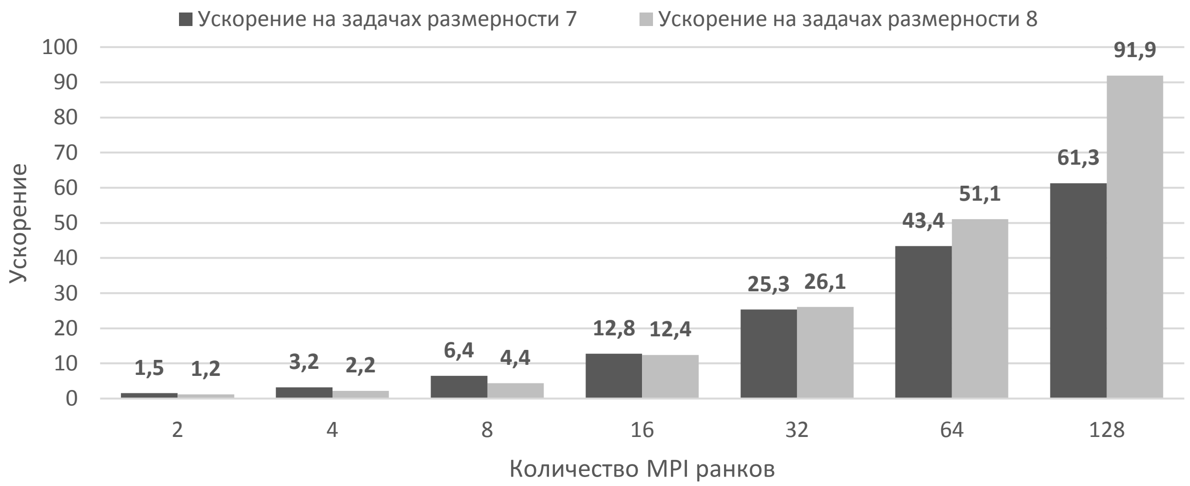

Рис. 1. Ускорение параллельной схемы

Результаты эксперимента свидетельствуют о существенном ускорении процесса оптимизации при использовании параллельной адаптивной схемы. Следует отметить тот факт, что при небольшом количестве ранков ускорение лучше для задач меньшей размерности, а при увеличении числа ранков эффективность решения задач большей размерности становится выше (при 128 ранках ускорение для 8-мерных задач почти в 1.5 раза лучше, чем для 7-мерных). В связи с этим интересным представляется расширение эксперимента на задачи больших размерностей с увеличением количества используемых MPI ранков.

5. Заключение

В статье рассматривается один из возможных вариантов распараллеливания адаптивной схемы редукции размерности, предназначенной для решения многомерных многоэкстремальных задач глобальной оптимизации. Предлагаемый параллельный метод является обобщением адаптивной схемы [13], которая ранее изучалась только в последовательной реализации и продемонстрировала высокую эффективность по сравнению с другими методами глобального поиска [18]. Описана общая схема многошаговой редукции и ее адаптивное развитие, устраняющее недостаток классической схемы, связанный с отсутствием информационных связей между одномерными подзадачами.

Предложен способ параллелизации вычислений в рамках адаптивной схемы, основанный на идее параллельных характеристических алгоритмов [21]. Эффективность распараллеливания протестирована с помощью численного эксперимента на известном классе многоэкстремальных функций GKLS. Результаты тестирования на представительных выборках тестовых функций размерностей 7 и 8 показали значительное ускорение вычислений адаптивной параллельной схемы по сравнению с ее чисто последовательной версией.

Полученные результаты демонстрируют перспективность исследований в направлении развития параллельных методов глобальной оптимизации на основе адаптивной схемы редукции размерности. В частности, имеются серьезные резервы по сокращению временных затрат на обмен информацией между процессорами, возможно применение параллельных алгоритмов решения одномерных подзадач, совершенствования механизмов распределения подзадач по процессорам. Важным направлением дальнейших исследований также является сравнение параллельных алгоритмов на базе адаптивной схемы с другими известными параллельными методами глобального поиска.

Литература

1. Strongin R.G., Sergeyev Y.D. Global Optimization with Non-convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms. Kluwer Academic Publishers, 2000. 704 p. DOI:10.1007/978-1-4615-4677-1.
2. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах. Наука, Москва, 1978. 240 с.
3. Стронгин Р.Г., Гергель В.П., Гришагин В.А., Баркалов К.А. Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. Москва: Издательство Московского университета, 2013. 280 с.
4. Barkalov K., Gergel V. Parallel global optimization on GPU // Journal of Global. Optimization. 2016. Vol. 66, No. 1. P. 3–20. DOI: 10.1007/s10898-016-0411-y.
5. Баркалов К.А., Лебедев И.Г. Решение задач глобальной оптимизации на графических ускорителях // Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции (26-27 сентября 2016 г., г. Москва).– М.: Изд-во МГУ, 2016. С. 640-650.
6. Сысоев А.В., Баркалов К.А., Гергель В.П., Лебедев И.Г. Решение задач глобальной оптимизации на гетерогенных кластерных системах // Суперкомпьютерные дни в России: Труды международной конференции (28 – 29 сентября 2015 г., г. Москва). Москва : Изд-во МГУ. 2015. С. 411-419.
7. Butz A.R. Space-Filling Curves and Mathematical Programming // Information and Control. 1968. Vol. 12. P. 314-330.
8. Carr C.R., Howe C.W. Quantitative Decision Procedures in Management and Economic: Deterministic Theory and Applications. McGraw-Hill, 1964. 383 p.
9. Dam E.R., Husslage B., Hertog D. One-dimensional Nested Maximin Designs // Journal of Global. Optimization. 2010. Vol. 46, No. 2. P. 287-306. DOI: 10.1007/s10898-009-9426-y.
10. Evtushenko Yu., Posypkin M. A deterministic approach to global box-constrained optimization // Optimization Letters. 2013. Vol. 7, No. 4. P. 819–829. DOI: 10.1007/s11590-012-0452-1.
11. Evtushenko Yu.G., Malkova V.U., Stanevichyus A.A. Parallel global optimization of functions of several variables // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. Vol. 49, No. 2. P.246-260. DOI: 10.1134/S0965542509020055.
12. Gaviano M., Kvasov D.E., Lera D., Sergeyev Y.D., Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29, No. 4. P. 469-480.
13. Gergel V., Grishagin V., Gergel A. Adaptive nested optimization scheme for multidimensional global search // Journal of Global. Optimization. 2016. Vol. 66, No. 1. P. 35-51. DOI:10.1007/s10898-015-0355-7.
14. Gergel V., Grishagin V., Israfilov R. Local tuning in nested scheme of global optimization // Procedia Computer Science. 2015. Vol. 51. P. 865-874. DOI: 10.1016/j.procs.2015.05.216.

15. Gergel V.P., Kuzmin M.I., Solovyov N.A., Grishagin V.A. Recognition of surface defects of cold-rolling sheets based on method of localities // International Review of Automatic Control. 2015. Vol. 8, No.1. P. 51-55. DOI: 10.15866/ireaco.v8i1.4935.

16. Goertzel V. Global Optimization with Space-Filling Curves. Applied Mathematics Letters. 1999. Vol. 12. P. 133-135.

17. Grishagin V.A., Strongin R.G. Optimization of multiextremal functions subject to monotonically unimodal constraints // Engineering Cybernetics. 1984.Vol. 22. P. 117-122.

18. Grishagin V.A., Israfilov R.A., Sergeyev Y.D. Comparative efficiency of dimensionality reduction schemes in global optimization // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1776. P. 060011-1 - 060011-4. DOI: 10.1063/1.4965345

19. Grishagin V.A., Israfilov R.A. Global search acceleration in the nested optimization scheme // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1738. P. 400010-1 - 400010-4. DOI: 10.1063/1.4952198

20. Grishagin V.A., Israfilov R.A. Multidimensional Constrained Global Optimization in Domains with Computable Boundaries // CEUR Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1513. P. 75-84.

21. Grishagin V.A., Sergeyev Y.D., Strongin R.G. Parallel Characteristic Algorithms for Solving Problems of Global Optimization // Journal of Global. Optimization. 1997. Vol. 10, No. 2. P. 185-206. DOI: 10.1023/A:1008242328176

22. Гришагин В.А. Об условиях сходимости одного класса алгоритмов глобального поиска // Труды 3-го Всесоюзного семинара «Численные методы нелинейного программирования» . 1979. Харьков. С. 82-84.

23. Jones D.R. The DIRECT Global Optimization Algorithm // Encyclopedia of optimization 1. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 431–440. DOI: 10.1007/0-306-48332-7_93.

24. Hime A.E., Oliveira Jr. H.A., Petraglia A. Global Optimization Using Space-Filling Curves and Measure-Preserving Transformations // Soft Computing in Industrial Applications. 2011. Vol. 96. P. 121-130. DOI: 10.1007/978-3-642-20505-7_10

25. He J., Verstak A., Watson L.T., Sosonkina M. Design and implementation of a massively parallel version of DIRECT // Computational Optimization and Applications. 2008. Vol. 40, No.2. P. 217-245. DOI: 10.1007/s10589-007-9092-2.

26. Kvasov D.E., Pizzuti C., Sergeyev Y.D. Local tuning and partition strategies for diagonal GO methods // Numerische Matematik. 2003, Vol. 94, No. 1. P. 93-106. DOI:10.1007/s00211-002-0419-8.

27. Pintér J.D. Global Optimization in Action. Kluwer Academic Publishers, 1996. 480 p. DOI:10.1007/978-1-4757-2502-5.

28. Piyavskij S.A. An Algorithm for Finding the Absolute Extremum of a Function // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 12, No.4. P. 57-67. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90115-2.

29. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves. Springer, 2013. 125 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8042-6.

30. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // Journal of Computational Analysis and Applications. 2001. Vol. 3, No. 2. P.123-145. DOI: 10.1023/A:1010185125012.

31. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. Sequential and parallel algorithms for global optimization // Optimization Methods and Software. 1994. Vol. 3. P. 111-124. DOI: 10.1080/10556789408805559.

32. Shi L., Ólafsson S. Nested Partitions Method for Global Optimization // Operations Research. 2000. Vol. 48, No.3. P. 390-407. DOI: 10.1287/opre.48.3.390.12436.

Parallel implementation of the adaptive nested scheme of dimensionality reduction for problems of global optimization *

V.A. Grishagin, R.A. Israfilov

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

Complicated multiextremal multidimensional problems of global optimization are considered and a new parallel global search algorithm based on the adaptive nested scheme of reducing dimension are proposed. A brief description of the algorithms and ways of parallelism implementation are given. Results of computational experiments on well-known class of multiextremal function GKLS which are the classical one for testing the global search algorithms are presented. These results on the sets of function with different dimensions demonstrate significant search acceleration of adaptive parallel scheme in comparison with its sequential prototype.

Key words: global optimization, multiextremal problems, dimensionality reduction, parallel adaptive scheme.

References

1. Strongin R.G., Sergeyev Y.D. Global Optimization with Non-convex Constraints: Sequential and Parallel Algorithms. Kluwer Academic Publishers, 2000. 704 p. DOI:10.1007/978-1-4615-4677-1.
2. Strongin R.G. Numerical methods in multiextremal problems. Moscow, Nauka Publishing, 1978. 240 p.
3. Strongin R.G., Gergel V.P., Grishagin V.A., Barkalov K.A. Parallel computations in global optimization problems. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 2013. 280 p.
4. Barkalov K., Gergel V. Parallel global optimization on GPU // Journal of Global. Optimization. 2016. Vol. 66, No. 1. P. 3–20. DOI: 10.1007/s10898-016-0411-y.
5. Barkalov K.A., Lebedev I.G. Solving the global optimization problems on GPU // Russian Supercomputer Days: Proceedings of the International Conference (September 26-27, 2016, Moscow).– Moscow, Publishing of the Moscow State University, 2016. P. 640-650.
6. Sysoev A.V., Barkalov K.A., Gergel V.P., Lebedev I.G. Solving the global optimization problems on heterogeneous cluster systems // Russian Supercomputer Days: Proceedings of the International Conference (September 28-29, 2015, Moscow).– Moscow, Publishing of the Moscow State University, 2015. P. 411-419.
7. Butz A.R. Space-Filling Curves and Mathematical Programming // Information and Control. 1968. Vol. 12. P. 314-330.
8. Carr C.R., Howe C.W. Quantitative Decision Procedures in Management and Economic: Deterministic Theory and Applications. McGraw-Hill, 1964. 383 p.
9. Dam E.R., Husslage B., Hertog D. One-dimensional Nested Maximin Designs // Journal of Global. Optimization. 2010. Vol. 46, No. 2. P. 287-306. DOI: 10.1007/s10898-009-9426-y.
10. Evtushenko Yu., Posypkin M. A deterministic approach to global box-constrained optimization // Optimization Letters. 2013. Vol. 7, No. 4. P. 819–829. DOI: 10.1007/s11590-012-0452-1.

* This research was supported by the Russian Science Foundation, project No. 15-11-30022 "Global optimization, supercomputing computations, and applications".

11. Evtushenko Yu.G., Malkova V.U., Stanevichyus A.A. Parallel global optimization of functions of several variables // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2009. Vol. 49, No. 2. P.246-260. DOI: 10.1134/S0965542509020055.

12. Gaviano M., Kvasov D.E., Lera D., Sergeyev Y.D., Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization // ACM Transactions on Mathematical Software. 2003. Vol. 29, No. 4. P. 469-480.

13. Gergel V., Grishagin V., Gergel A. Adaptive nested optimization scheme for multidimensional global search // Journal of Global. Optimization. 2016. Vol. 66, No. 1. P. 35-51. DOI:10.1007/s10898-015-0355-7.

14. Gergel V., Grishagin V., Israfilov R. Local tuning in nested scheme of global optimization // Procedia Computer Science. 2015. Vol. 51. P. 865-874. DOI: 10.1016/j.procs.2015.05.216.

15. Gergel V.P., Kuzmin M.I., Solovyov N.A., Grishagin V.A. Recognition of surface defects of cold-rolling sheets based on method of localities // International Review of Automatic Control. 2015. Vol. 8, No.1. P. 51-55. DOI: 10.15866/ireaco.v8i1.4935.

16. Goertzel V. Global Optimization with Space-Filling Curves. Applied Mathematics Letters. 1999. Vol. 12. P. 133-135.

17. Grishagin V.A., Strongin R.G. Optimization of multiextremal functions subject to monotonically unimodal constraints // Engineering Cybernetics. 1984.Vol. 22. P. 117-122.

18. Grishagin V.A., Israfilov R.A., Sergeyev Y.D. Comparative efficiency of dimensionality reduction schemes in global optimization // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1776. P. 060011-1 - 060011-4. DOI: 10.1063/1.4965345

19. Grishagin V.A., Israfilov R.A. Global search acceleration in the nested optimization scheme // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1738. P. 400010-1 - 400010-4. DOI: 10.1063/1.4952198

20. Grishagin V.A., Israfilov R.A. Multidimensional Constrained Global Optimization in Domains with Computable Boundaries // CEUR Workshop Proceedings. 2015. Vol. 1513. P. 75-84.

21. Grishagin V.A., Sergeyev Y.D., Strongin R.G. Parallel Characteristic Algorithms for Solving Problems of Global Optimization // Journal of Global. Optimization. 1997. Vol. 10, No. 2. P. 185-206. DOI: 10.1023/A:1008242328176

22. Grishagin V.A. On Convergence Conditions for a Class of Global Search Algorithms // Proceedings of the 3-rd All-Union Seminar Numerical Methods of Nonlinear Programming, Kharkov. 1979. P. 82-84.

23. Jones D.R. The DIRECT Global Optimization Algorithm // Encyclopedia of optimization 1. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 431–440. DOI: 10.1007/0-306-48332-7_93.

24. Hime A.E., Oliveira Jr. H.A., Petraglia A. Global Optimization Using Space-Filling Curves and Measure-Preserving Transformations // Soft Computing in Industrial Applications. 2011. Vol. 96. P. 121-130. DOI: 10.1007/978-3-642-20505-7_10

25. He J., Verstak A., Watson L.T., Sosonkina M. Design and implementation of a massively parallel version of DIRECT // Computational Optimization and Applications. 2008. Vol. 40, No.2. P. 217-245. DOI: 10.1007/s10589-007-9092-2.

26. Kvasov D.E., Pizzuti C., Sergeyev Y.D. Local tuning and partition strategies for diagonal GO methods // Numerische Matematik. 2003, Vol. 94, No. 1. P. 93-106. DOI:10.1007/s00211-002-0419-8.

27. Pintér J.D. Global Optimization in Action. Kluwer Academic Publishers, 1996. 480 p. DOI:10.1007/978-1-4757-2502-5.

28. Piyavskij S.A. An Algorithm for Finding the Absolute Extremum of a Function // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 12, No.4. P. 57-67. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90115-2.

29. Sergeyev Y.D., Strongin R.G., Lera D. Introduction to Global Optimization Exploiting Space-Filling Curves. Springer, 2013. 125 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-8042-6.

30. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. Parallel Asynchronous Global Search and the Nested Optimization Scheme // Journal of Computational Analysis and Applications. 2001. Vol. 3, No. 2. P.123-145. DOI: 10.1023/A:1010185125012.

31. Sergeyev Y.D., Grishagin V.A. Sequential and parallel algorithms for global optimization // Optimization Methods and Software. 1994. Vol. 3. P. 111-124. DOI: 10.1080/10556789408805559.

32. Shi L., Ólafsson S. Nested Partitions Method for Global Optimization // Operations Research. 2000. Vol. 48, No.3. P. 390-407. DOI: 10.1287/opre.48.3.390.12436.