



УНИВЕРСИТЕТ
ЛОБАЧЕВСКОГО

Параллельная реализация адаптивной многошаговой схемы редукции размерности для задач глобальной оптимизации

Гришагин В. А. ⋮ Исрафилов Р. А.

Постановка задачи глобальной оптимизации

Требуется минимизировать многоэкстремальную функцию в области D

$$\varphi(x^*) = \min \{ \varphi(x) : x \in D \} \quad (1)$$

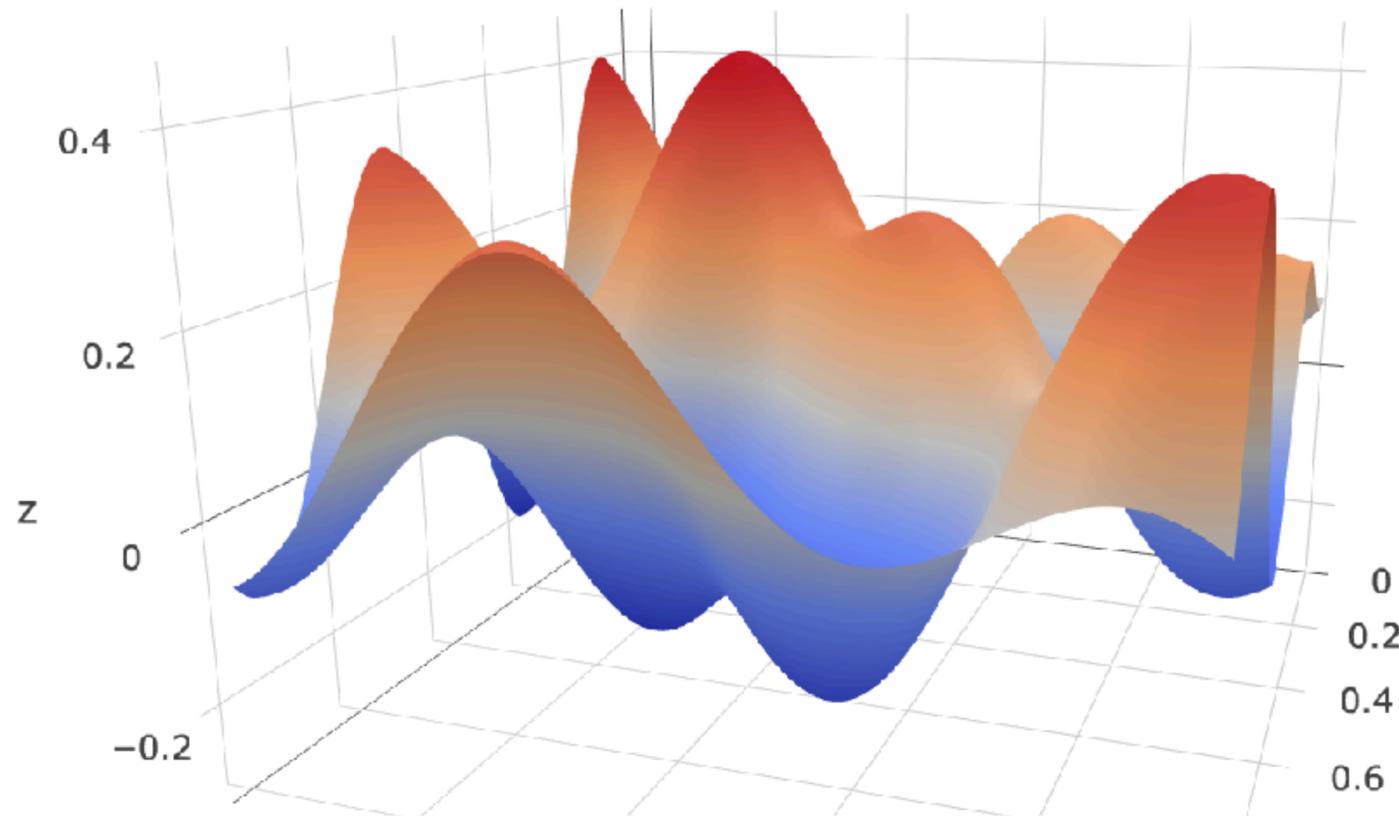
$$D = \{ x \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i \} \quad (2)$$

Для целевой функции выполняется условие Липшица

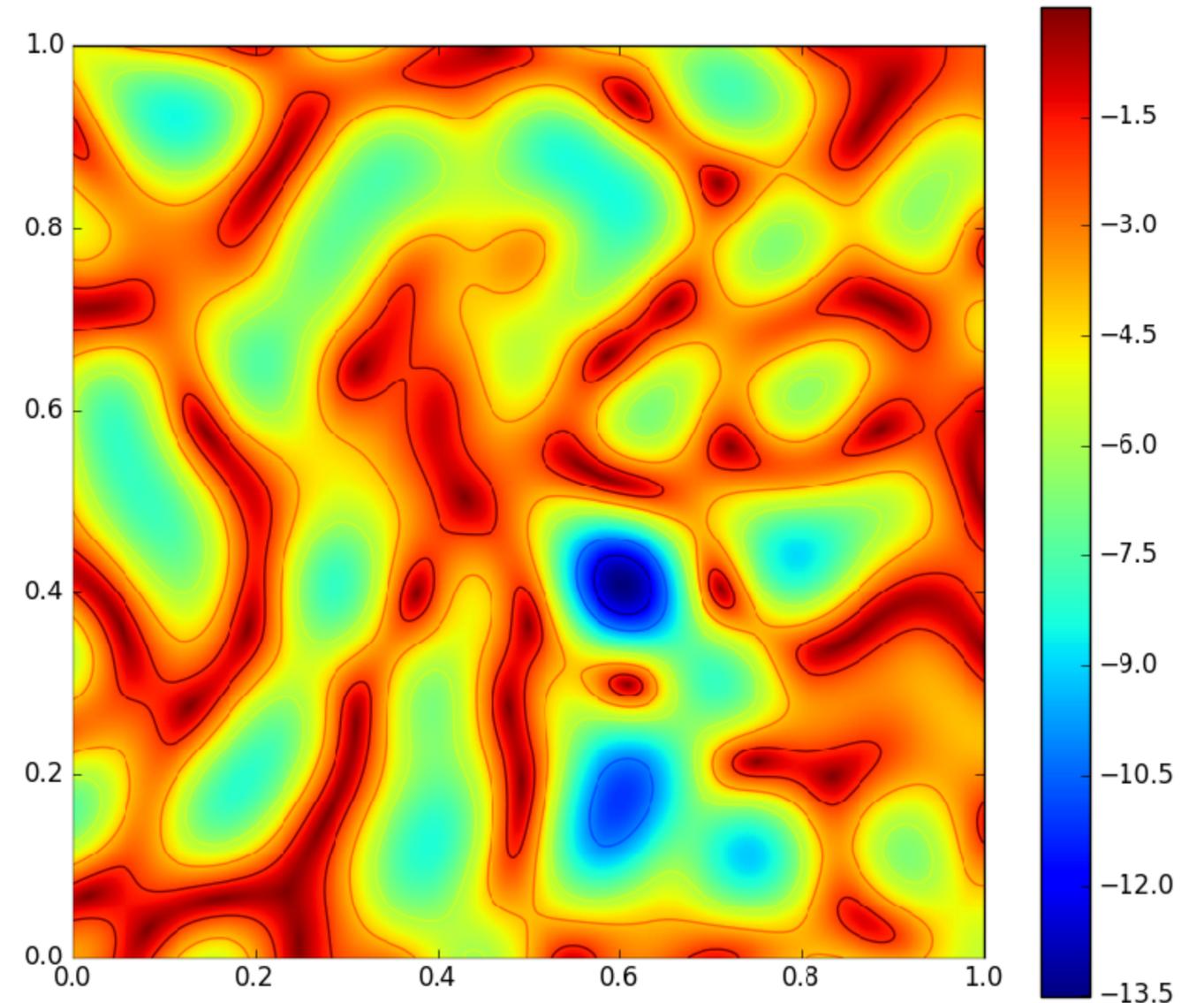
$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < L \|x' - x''\|, \quad x', x'' \in D \quad (3)$$



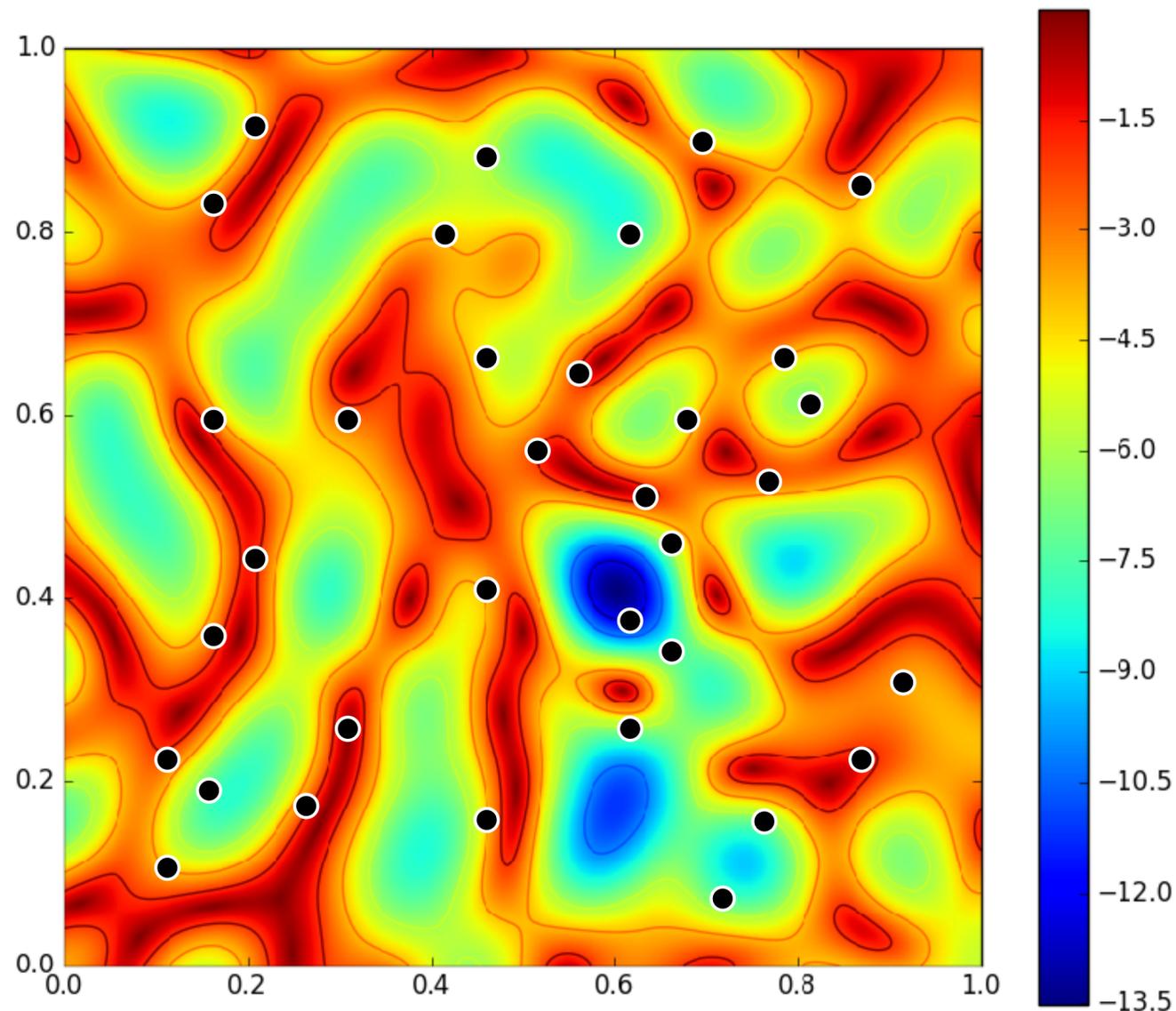
Постановка задачи глобальной оптимизации



$$\varphi(x_1, x_2) \rightarrow \min$$



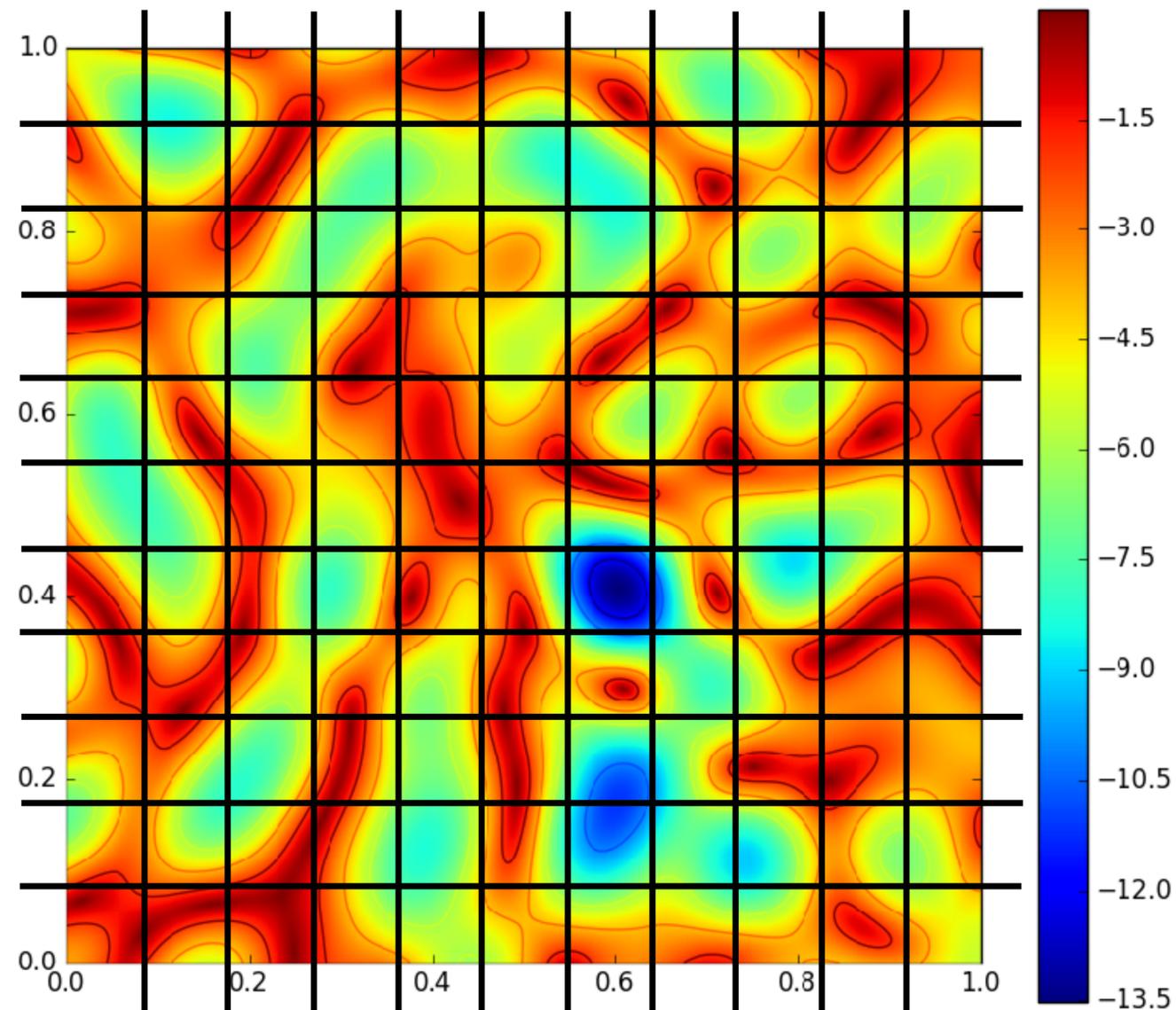
Постановка задачи глобальной оптимизации



φ — black-box function (допустимо только вычисление значения в точке)

Метрика качества алгоритма — количество вычислений ЦФ (чем меньше вычислений, тем алгоритм “быстрее”)

“Перебор” по равномерной сетке



Для решения одномерной задачи на отрезке $[0, 1]$ с точностью 0.01 требуется 100 вычислений цф.

Для решения задачи с 10-ю переменными в единичном гиперкубе потребуется 100^{10} вычислений.

Многошаговая схема редукции размерности

Основное соотношение многошаговой схемы редукции размерности

$$\varphi^* = \min_{x_1 \in [a_1, b_1]} \dots \min_{x_N \in [a_N, b_N]} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (4)$$

В развёрнутом виде для функции 2-х переменных

$$\varphi^* = \min_{x_1 \in D_1} \varphi_1(x_1) \quad D_1 = [a_1, b_1] \quad (5)$$

$$\varphi_1(x_1) = \min_{x_2 \in D_2} \varphi(x_1, x_2) \quad D_2 = [a_2, b_2] \quad (6)$$



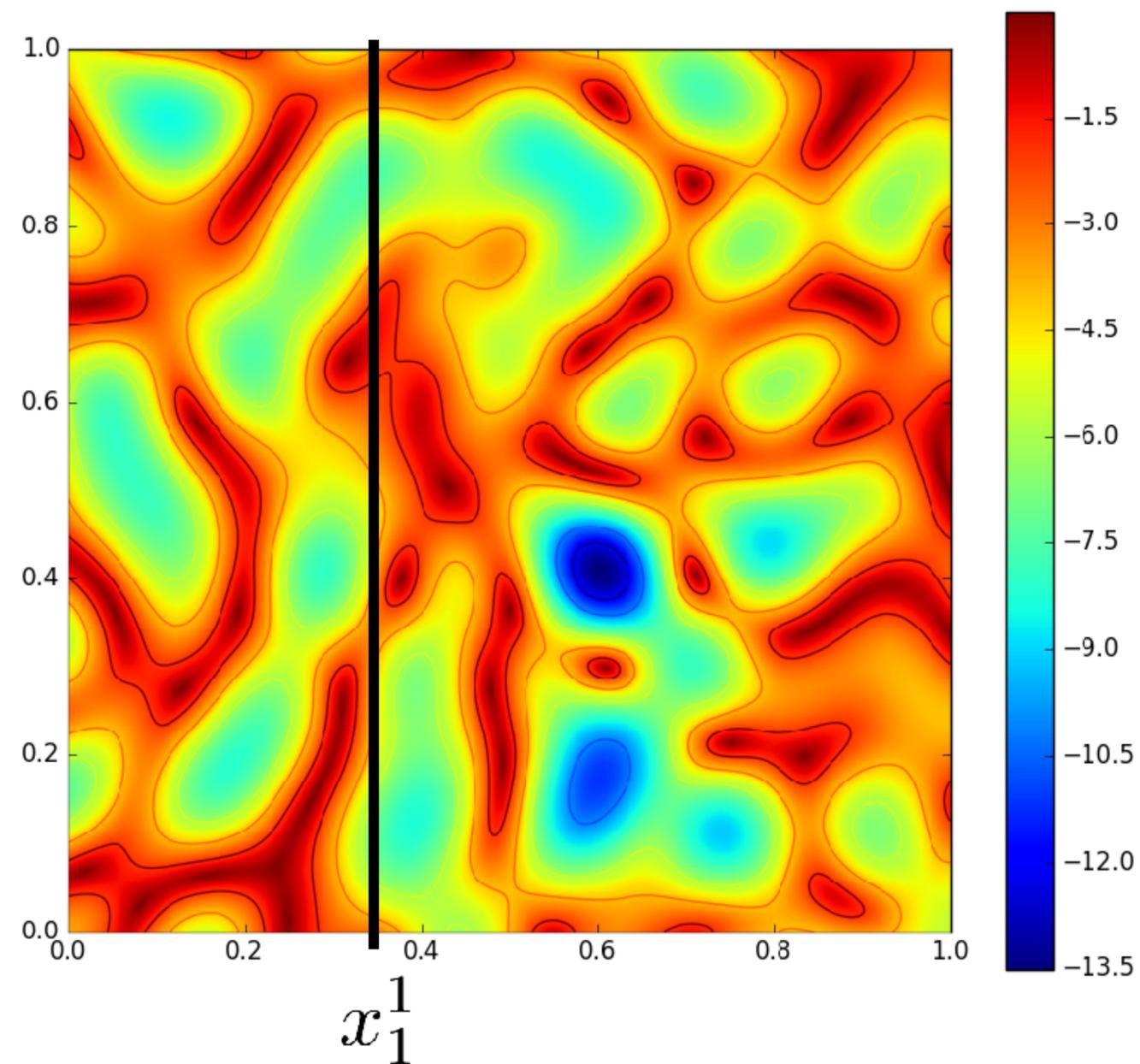
Многошаговая схема редукции размерности

$$\varphi_1(x_1) \rightarrow \min_{x_1 \in D_1}$$

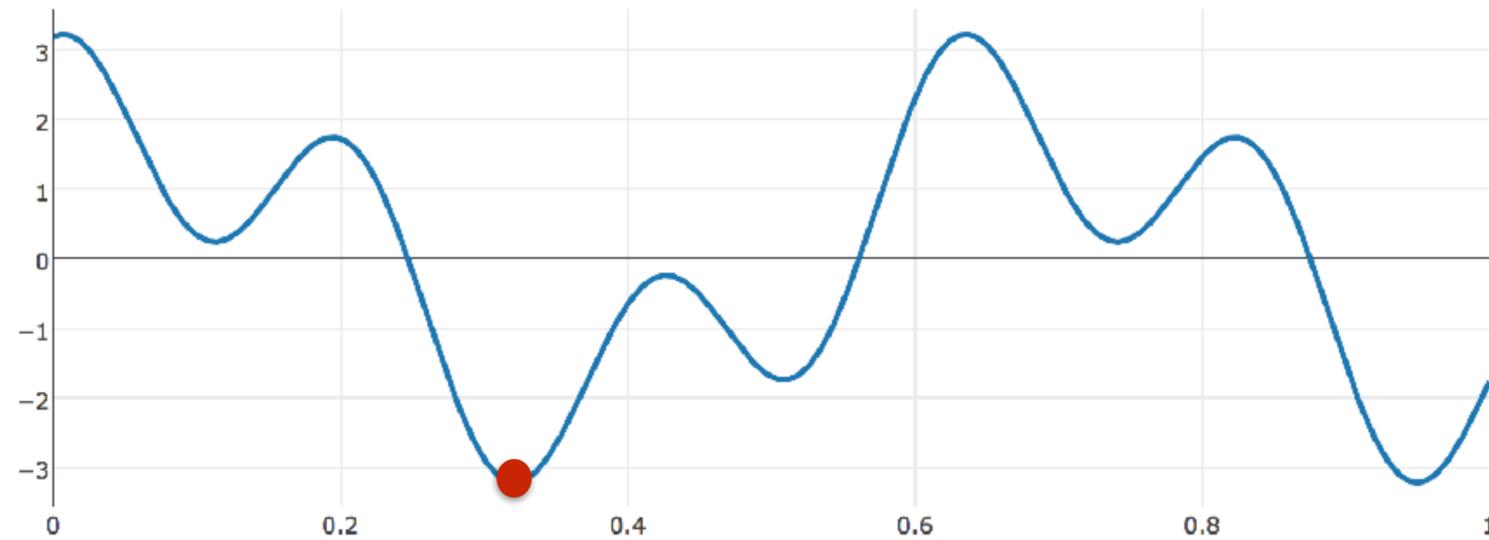
$$\varphi_1(x_1) = \min_{x_2 \in D_2} \varphi(x_1, x_2)$$

Используем одномерный численный метод для минимизации по переменной x_1

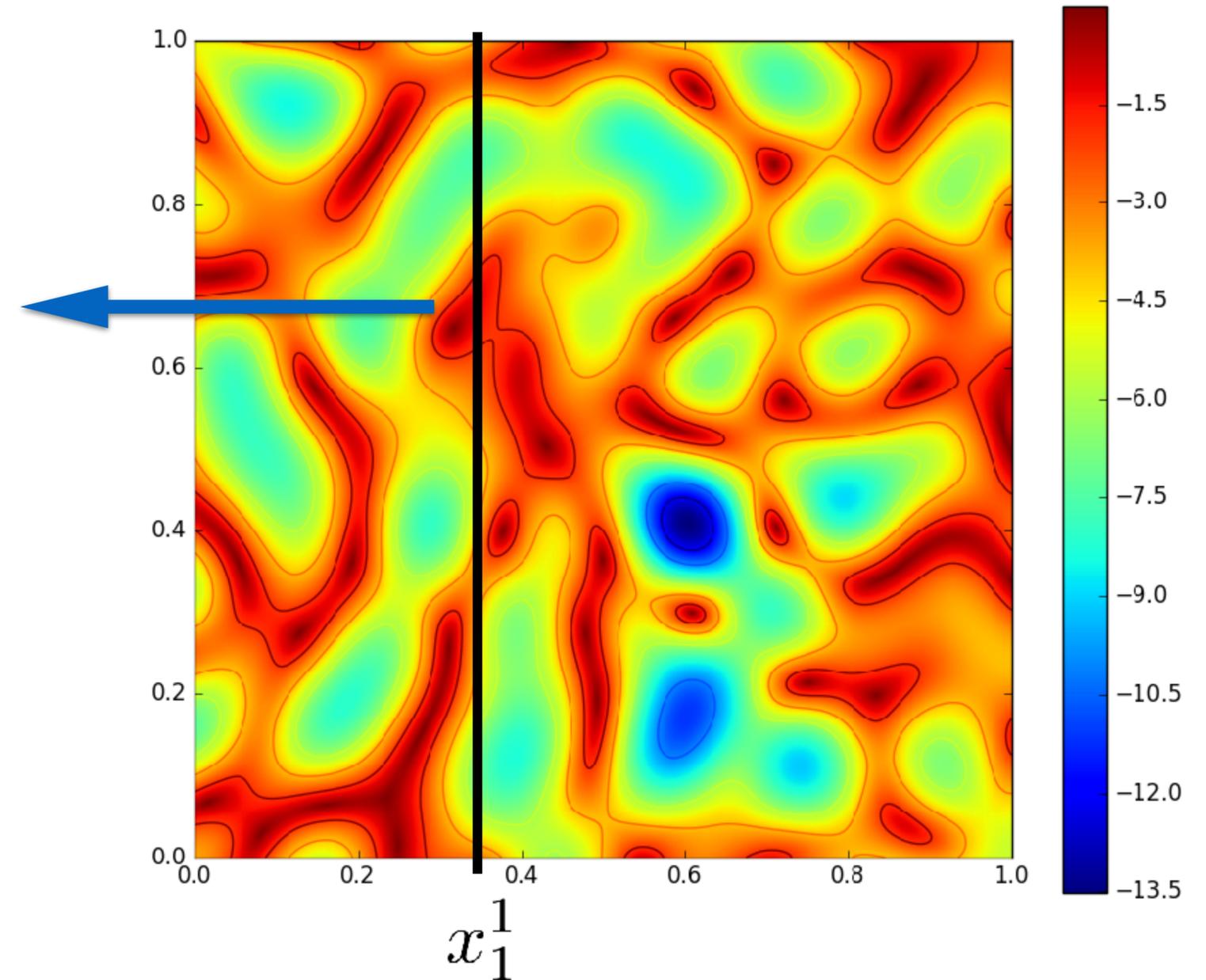
Пусть численный метод в качестве начальной точки выбирает x_1^1



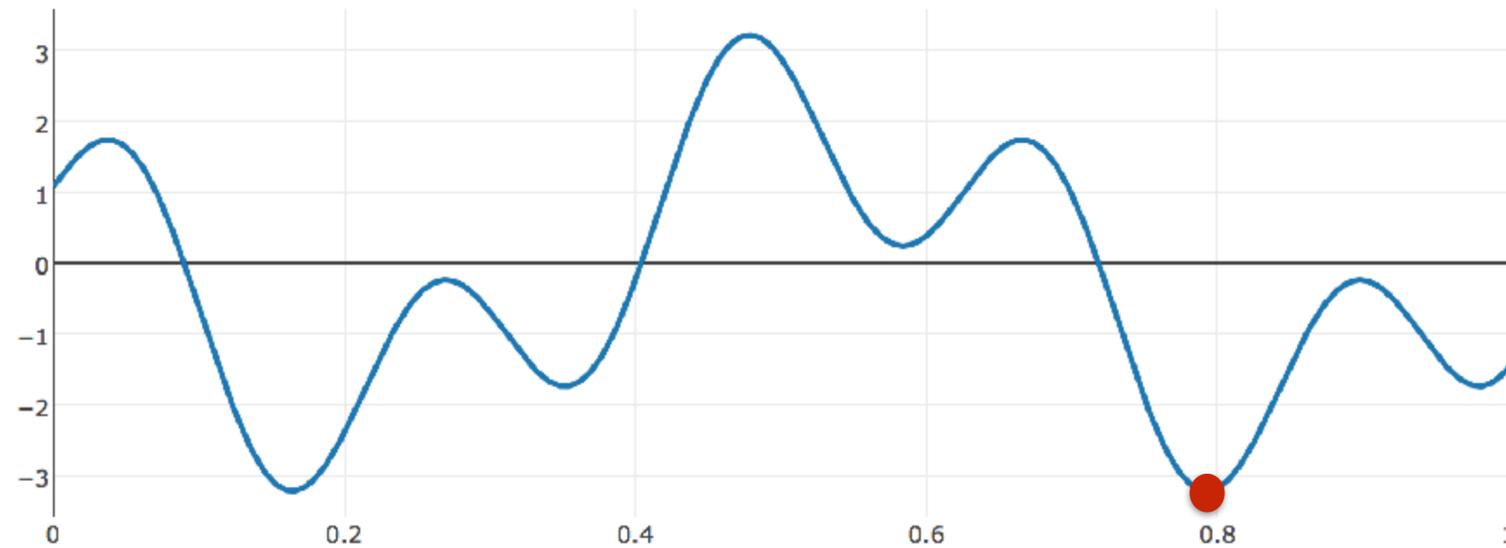
Многошаговая схема редукции размерности



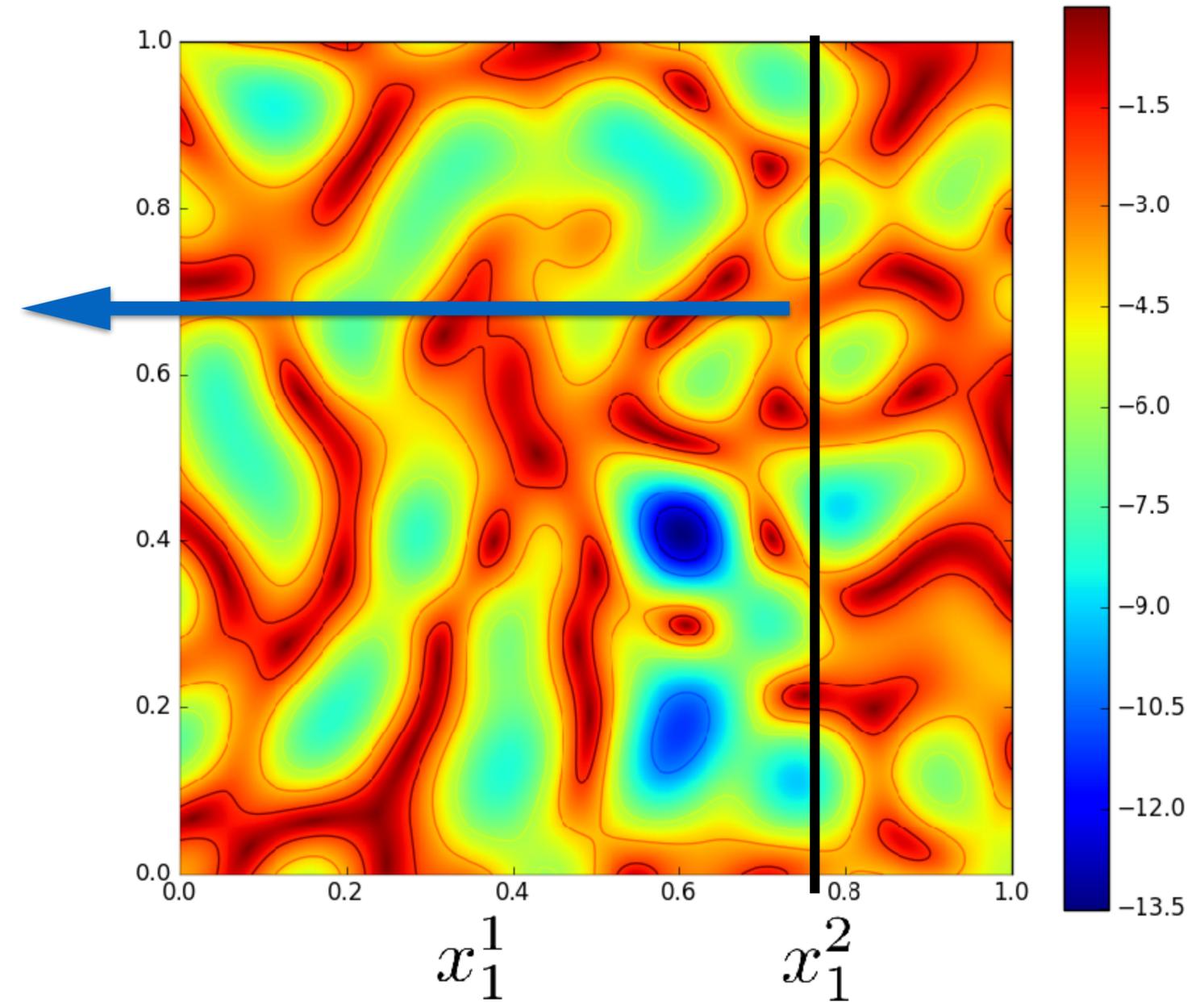
$$\varphi(x_1^1, x_2) \rightarrow \min_{x_2}$$



Многошаговая схема редукции размерности



$$\varphi(x_1^2, x_2) \rightarrow \min_{x_2}$$



Многошаговая схема редукции размерности

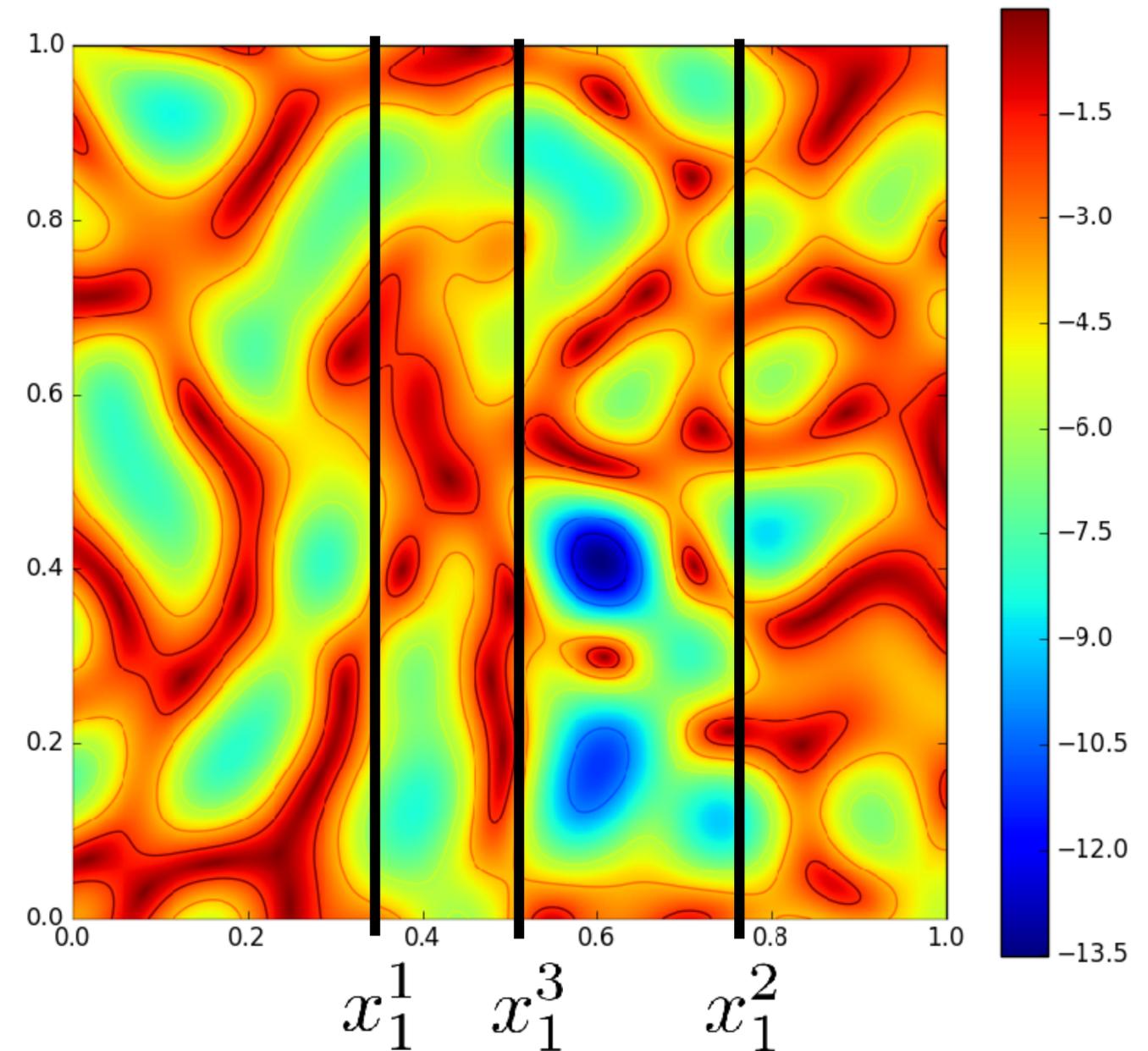
$$(9.1) \quad \varphi(x_1^1, x_2) \rightarrow \min_{x_2}$$

$$(9.2) \quad \varphi(x_1^2, x_2) \rightarrow \min_{x_2}$$

$$(9.3) \quad \varphi(x_1^3, x_2) \rightarrow \min_{x_2}$$

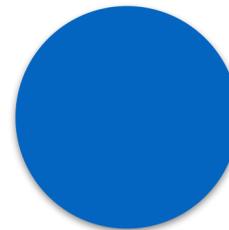
⋮

$$(9.n) \quad \varphi(x_1^n, x_2) \rightarrow \min_{x_2}$$

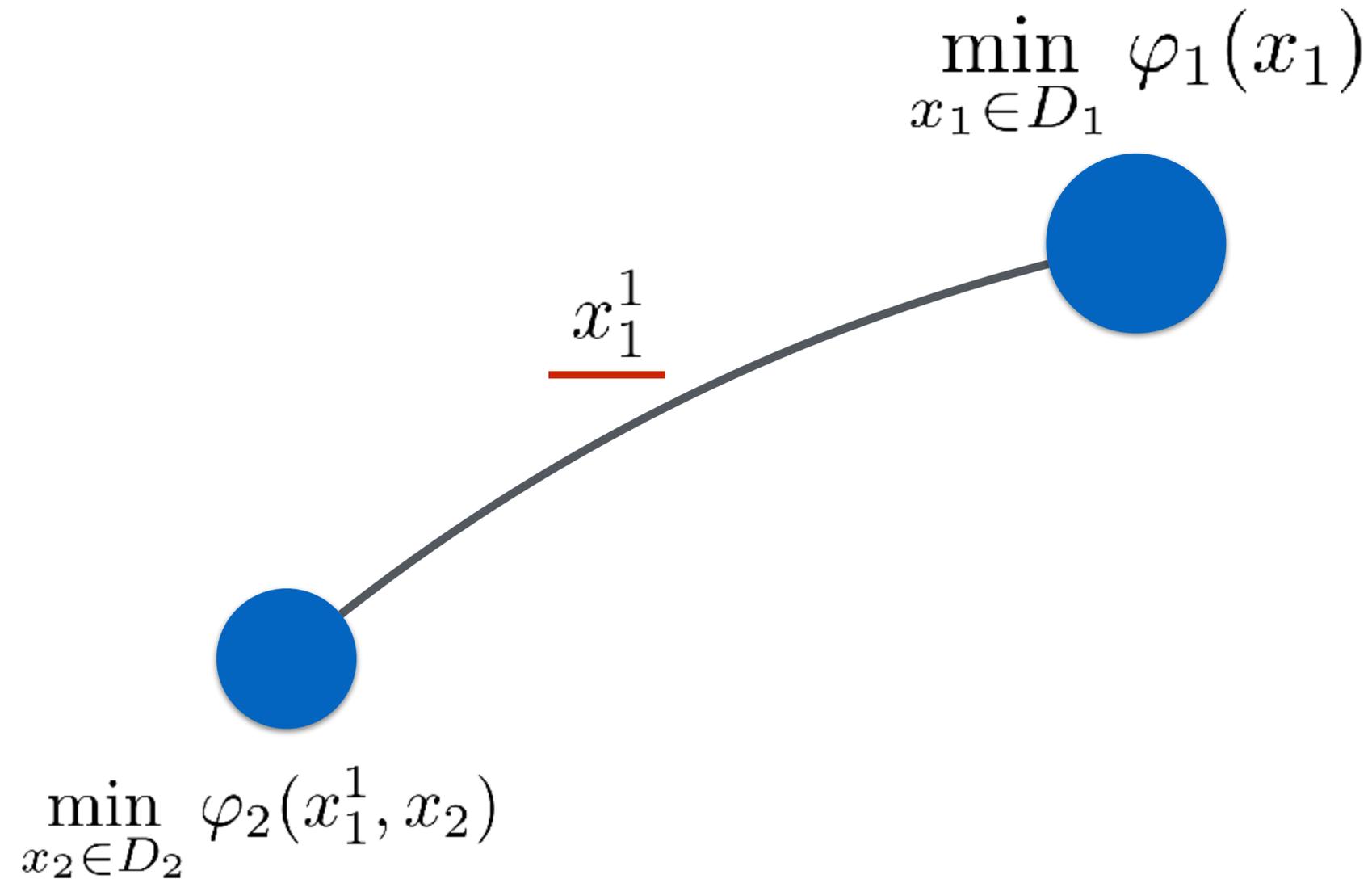


Многошаговая схема редукции размерности

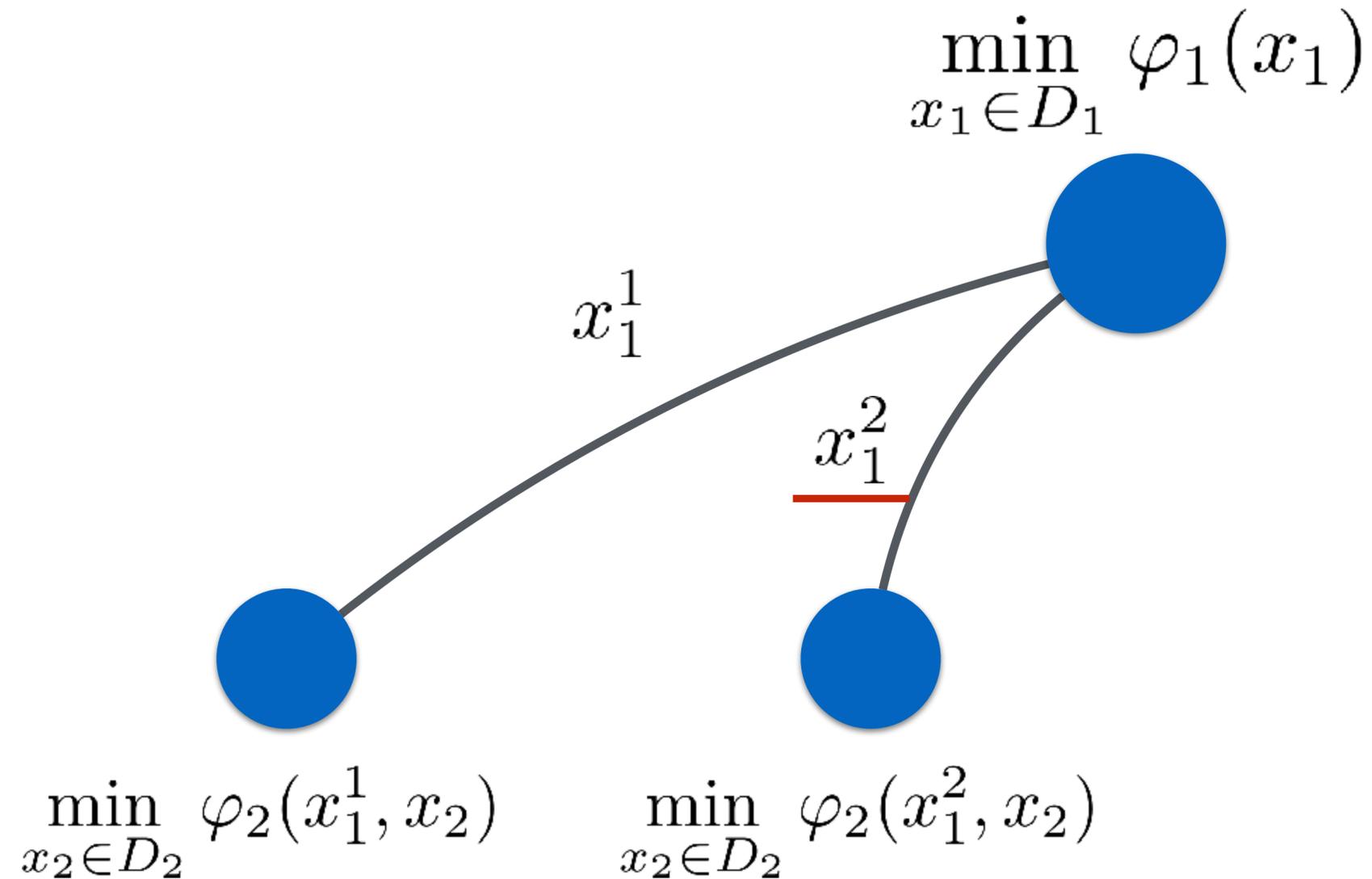
$$\min_{x_1 \in D_1} \varphi_1(x_1)$$



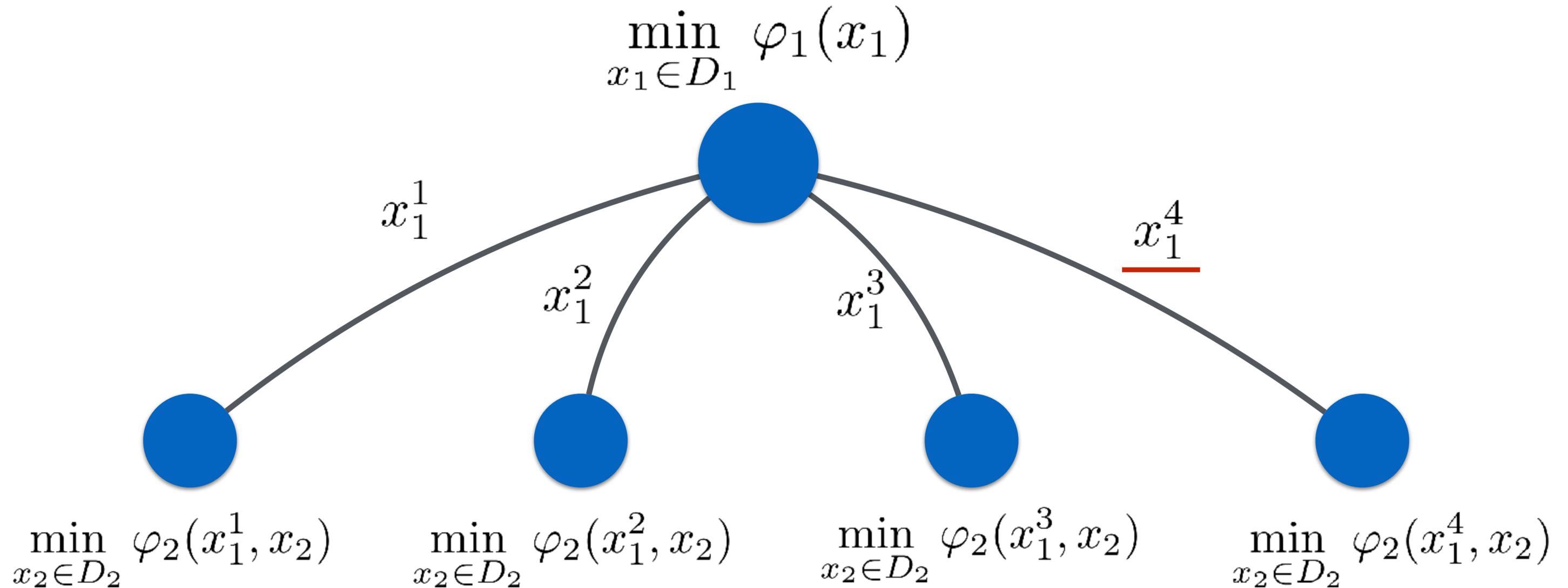
Многошаговая схема редукции размерности



Многошаговая схема редукции размерности



Многошаговая схема редукции размерности



Многошаговая схема редукции размерности

$$\varphi^* = \min_{x_1 \in [a_1, b_1]} \dots \min_{x_N \in [a_N, b_N]} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

В развёрнутом виде для функции 3-х переменных

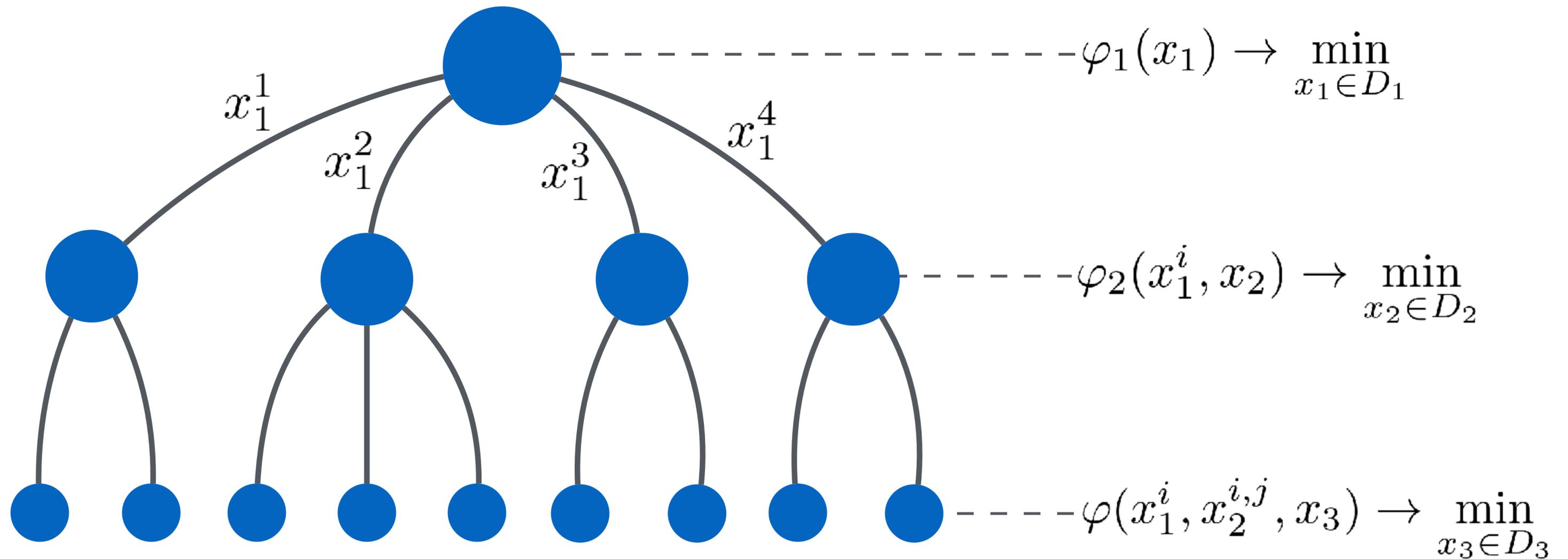
$$\varphi^* = \min_{x_1 \in D_1} \varphi_1(x_1) \tag{7.1}$$

$$\varphi_1(x_1) = \min_{x_2 \in D_2} \varphi_2(x_1, x_2) \tag{7.2}$$

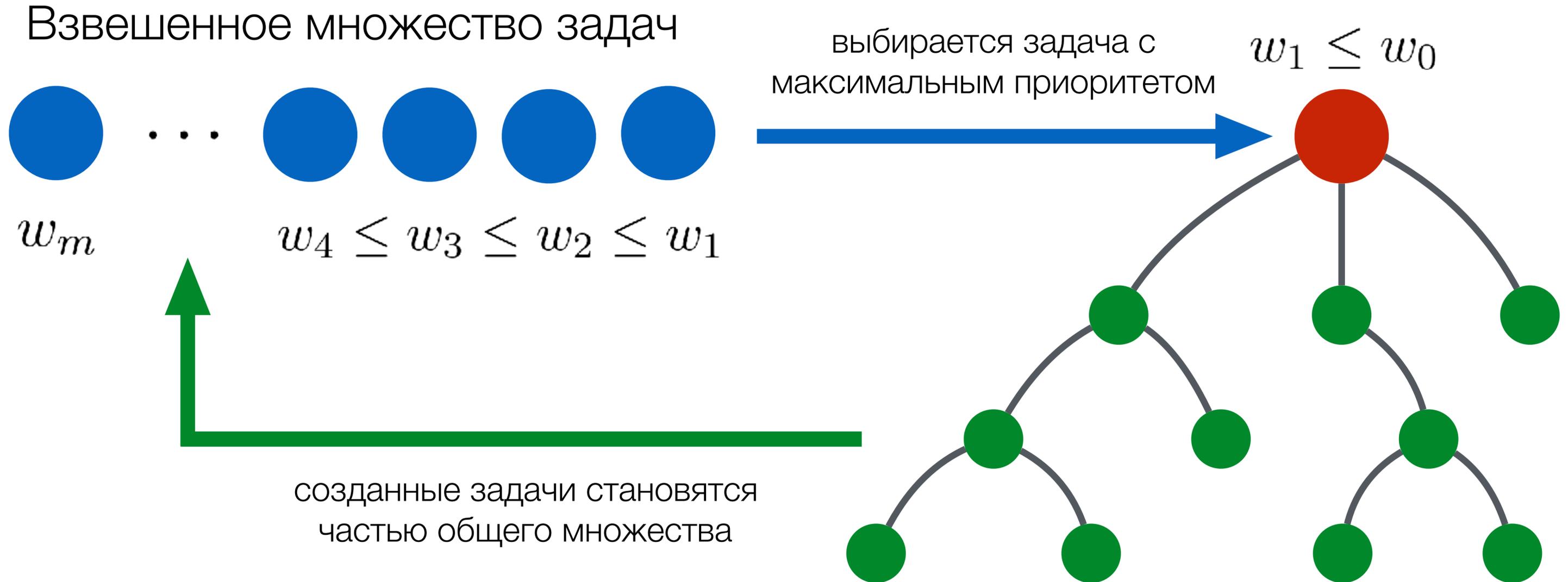
$$\varphi_2(x_1, x_2) = \min_{x_3 \in D_3} \varphi(x_1, x_2, x_3) \tag{7.3}$$



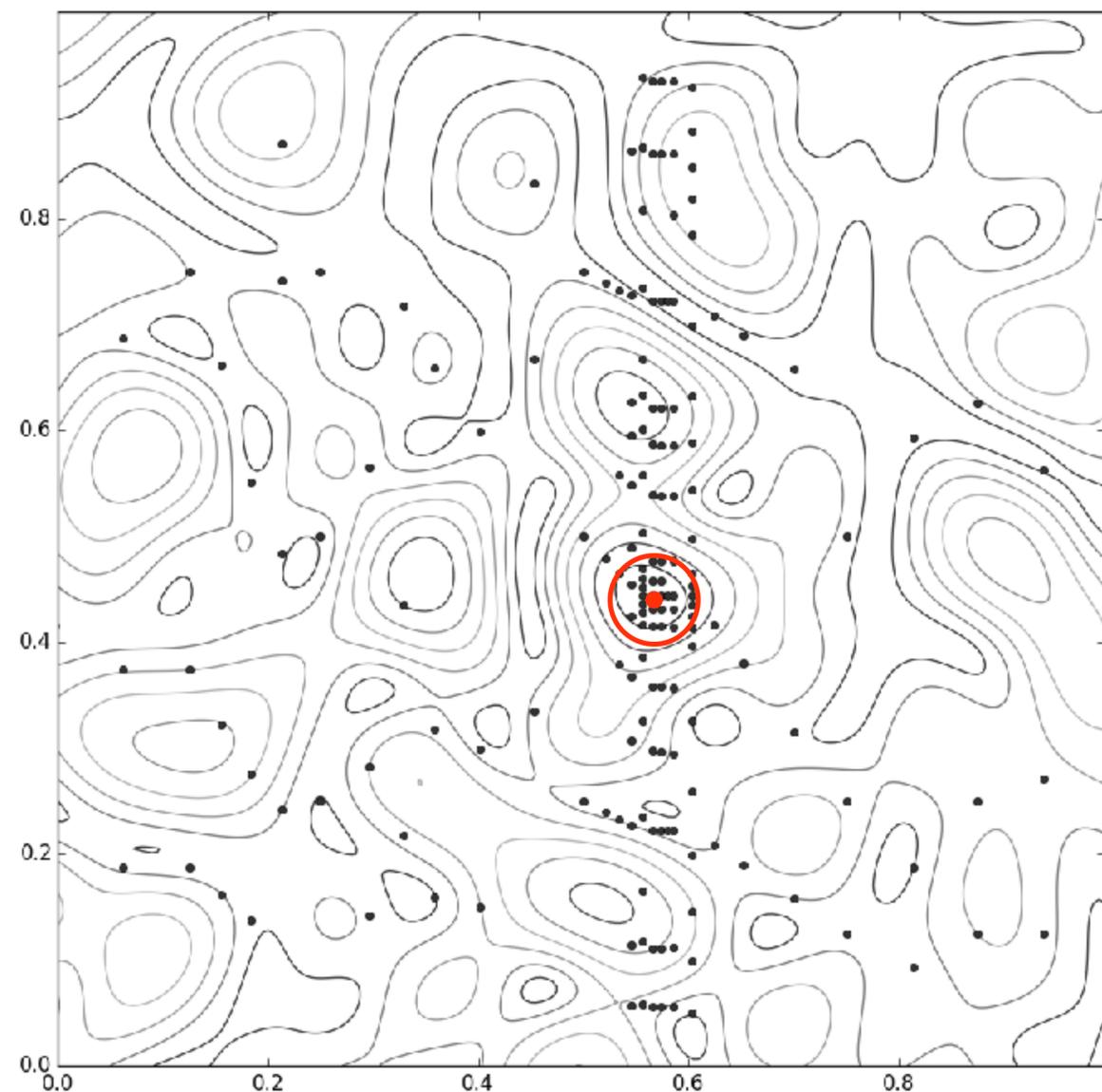
Многошаговая схема редукции размерности



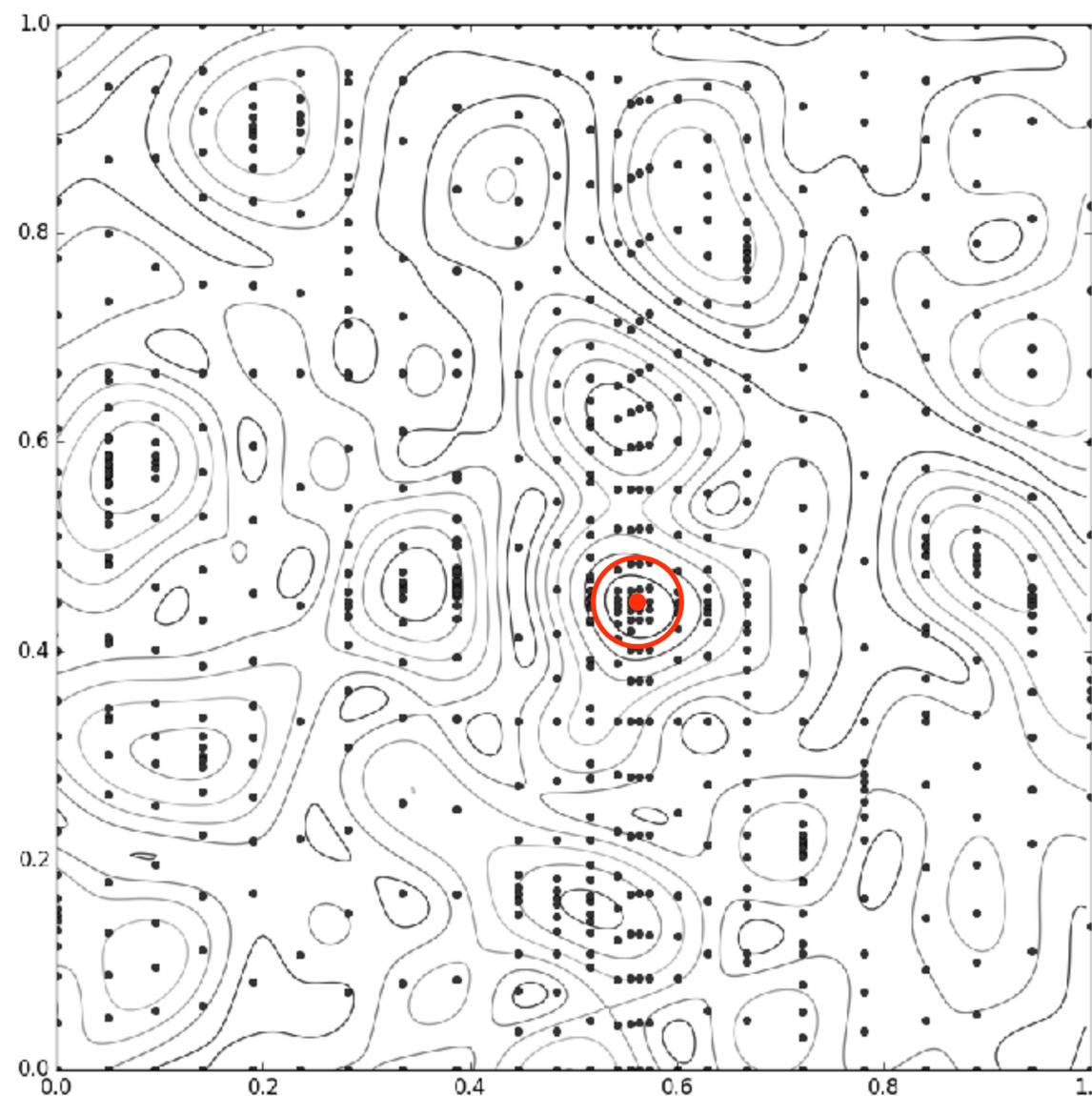
Адаптивная схема редукции размерности



Сравнение адаптивной и многошаговой схем (2D)



адаптивная



МНОГОШАГОВАЯ

 глобальный
МИНИМУМ

МНОГОШАГОВАЯ СХЕМА

682 выч.

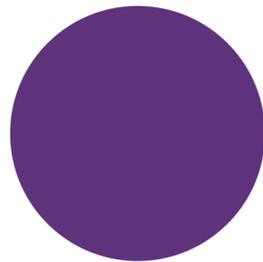
адаптивная схема

175 выч.

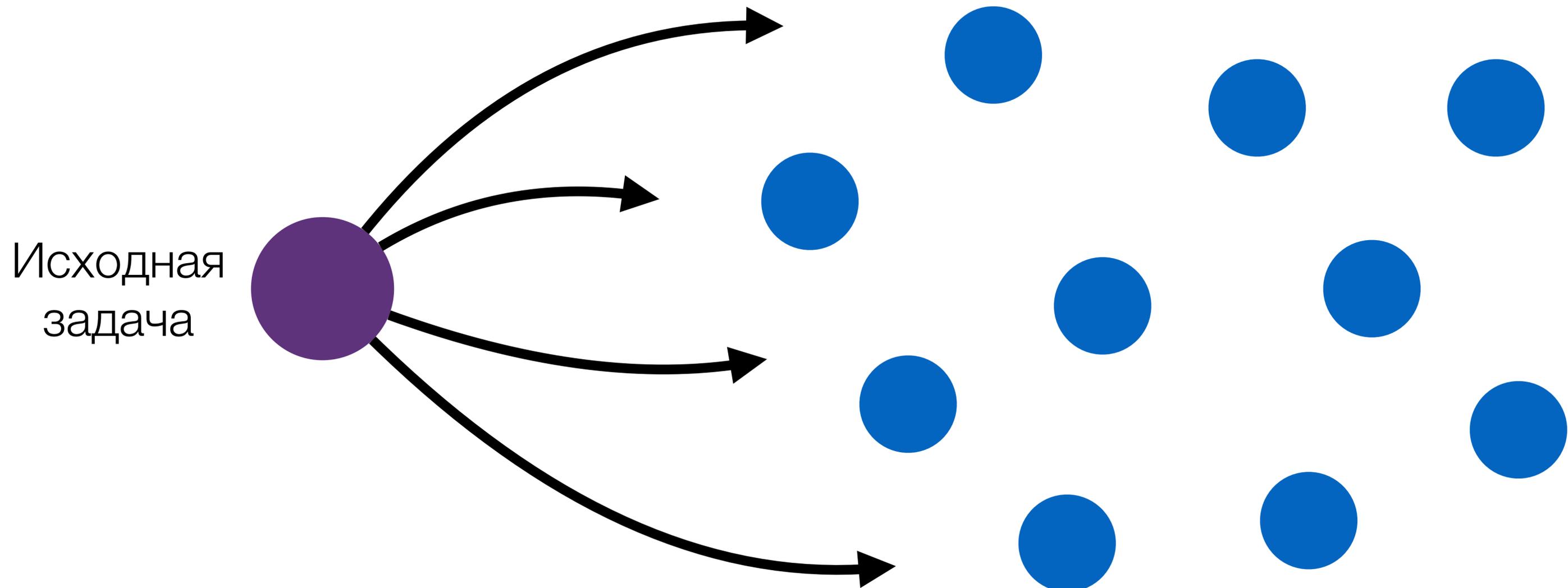
3.9X ↑

Порядок вычислений в адаптивной схеме

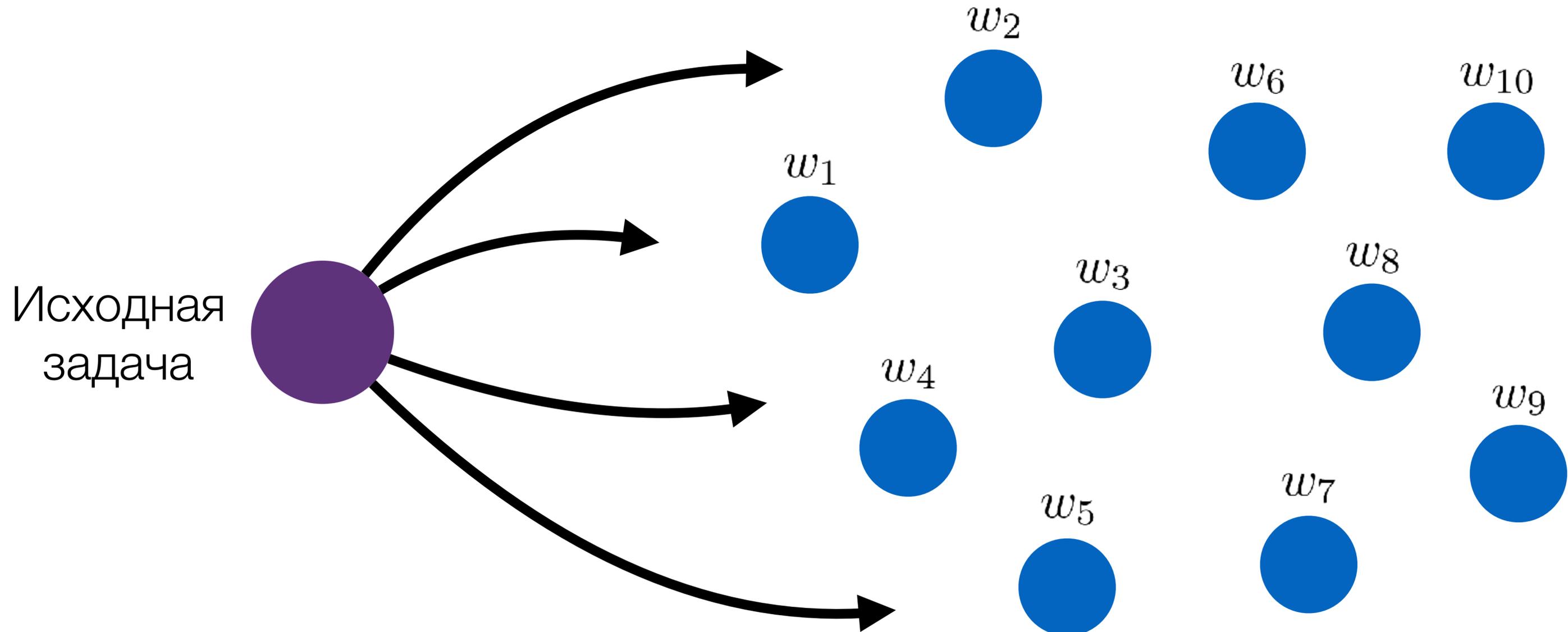
Исходная
задача



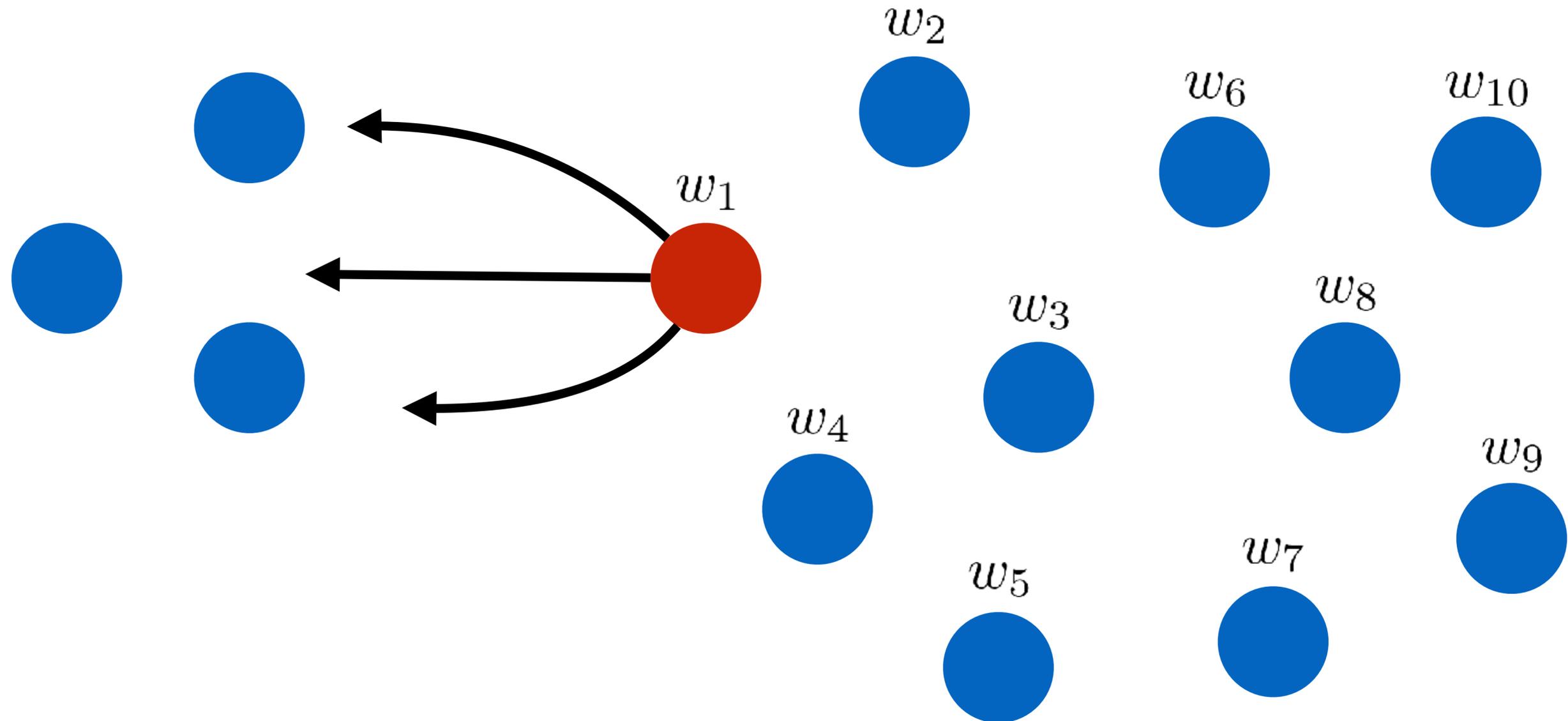
Порядок вычислений в адаптивной схеме



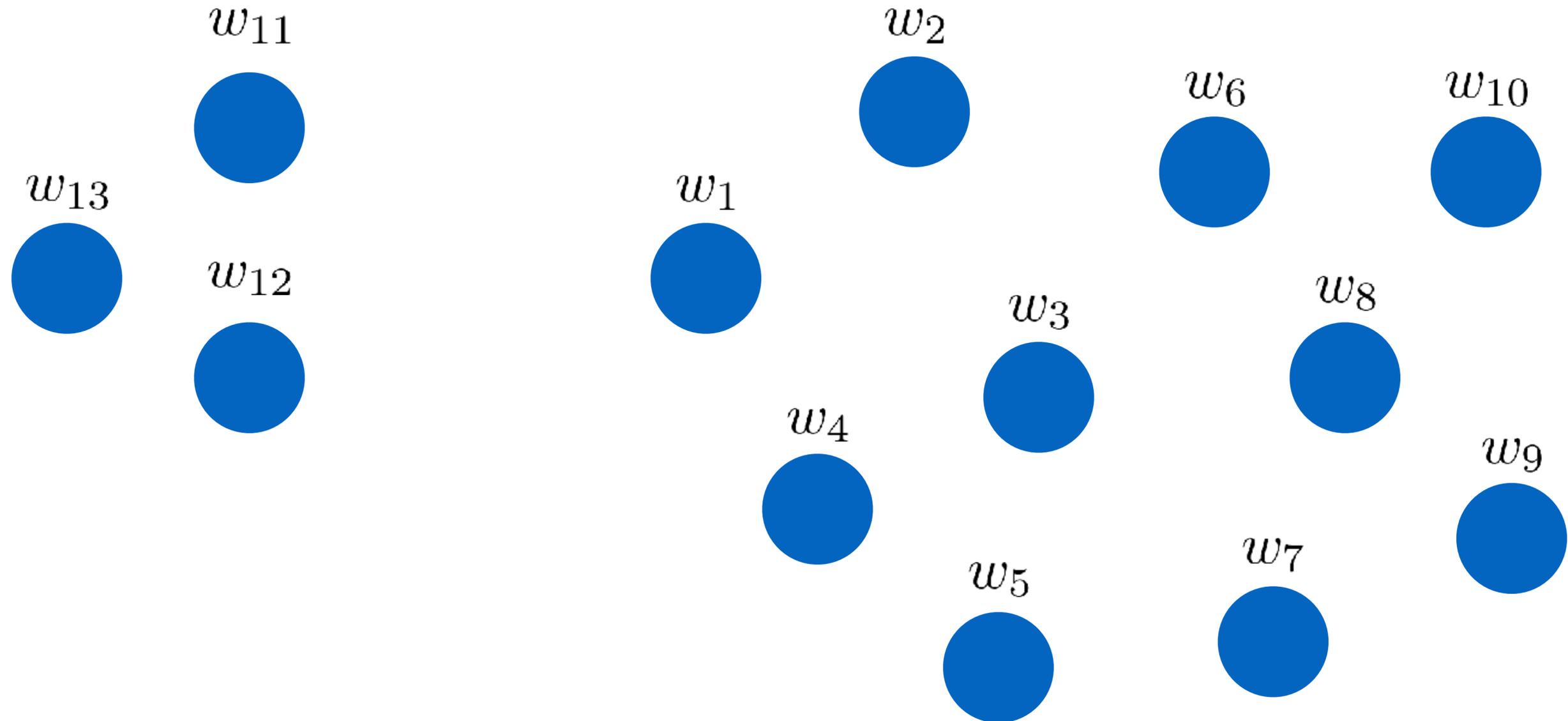
Порядок вычислений в адаптивной схеме



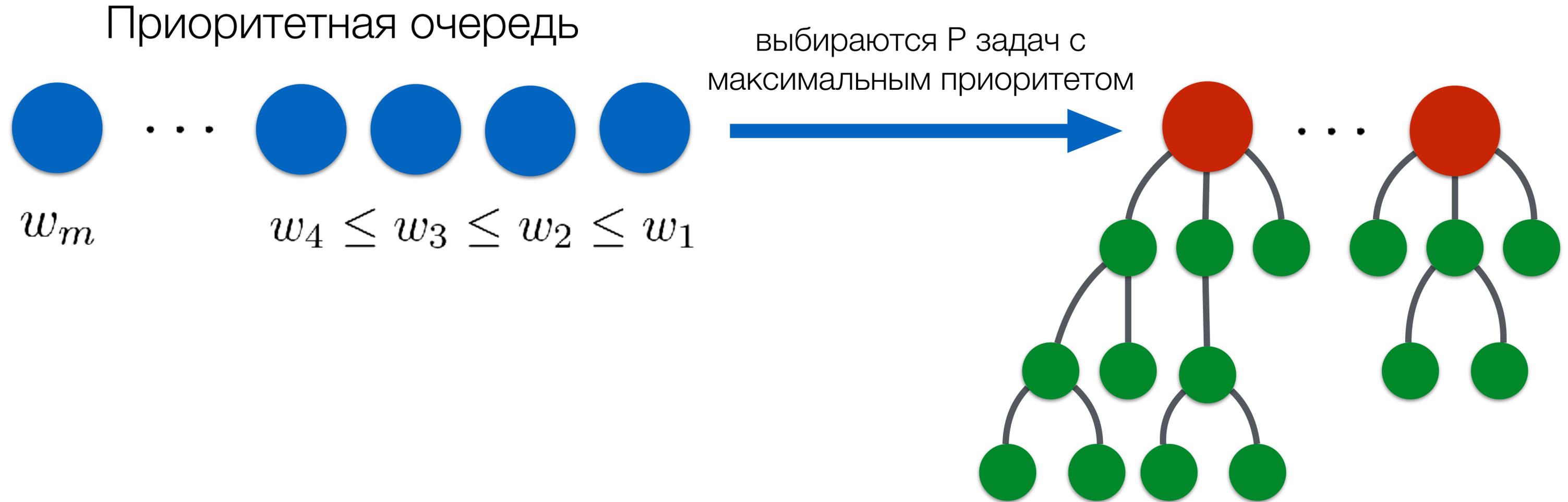
Порядок вычислений в адаптивной схеме



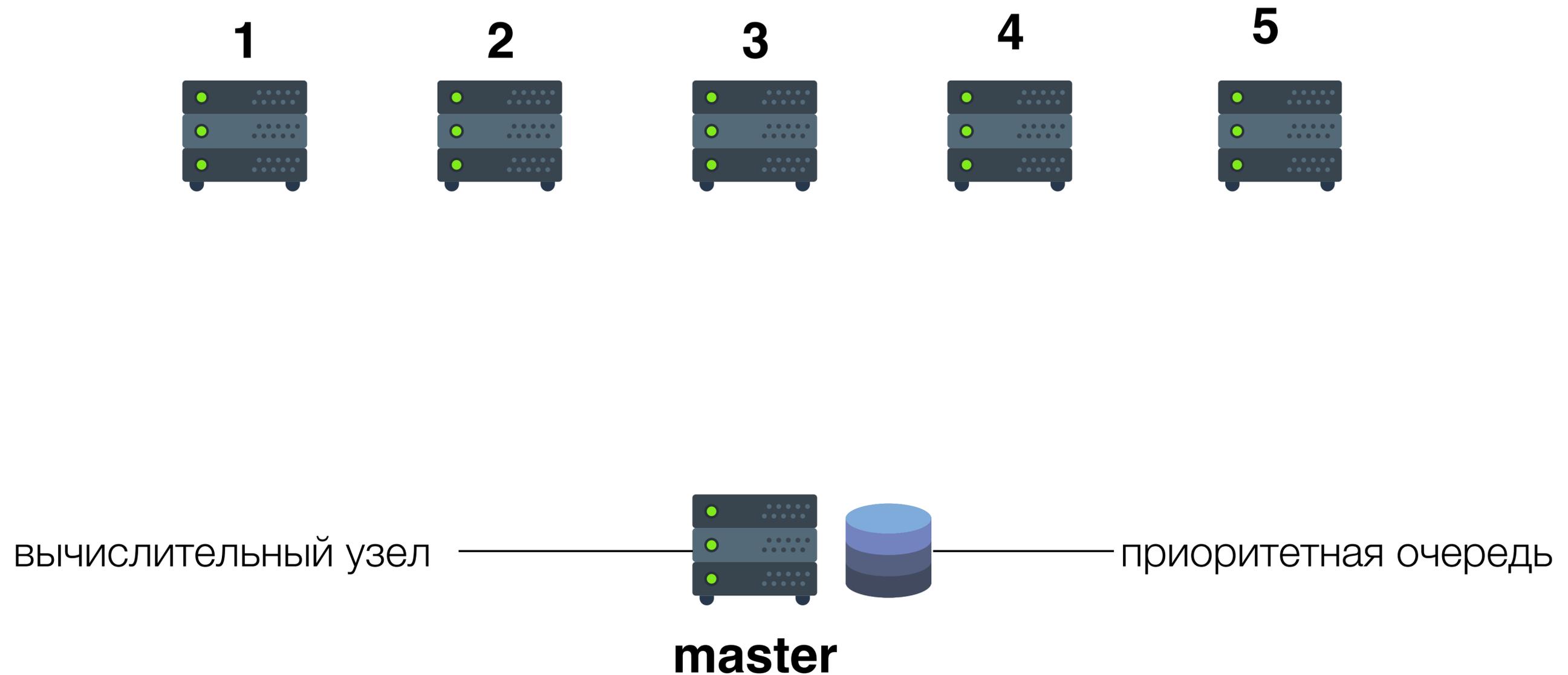
Порядок вычислений в адаптивной схеме



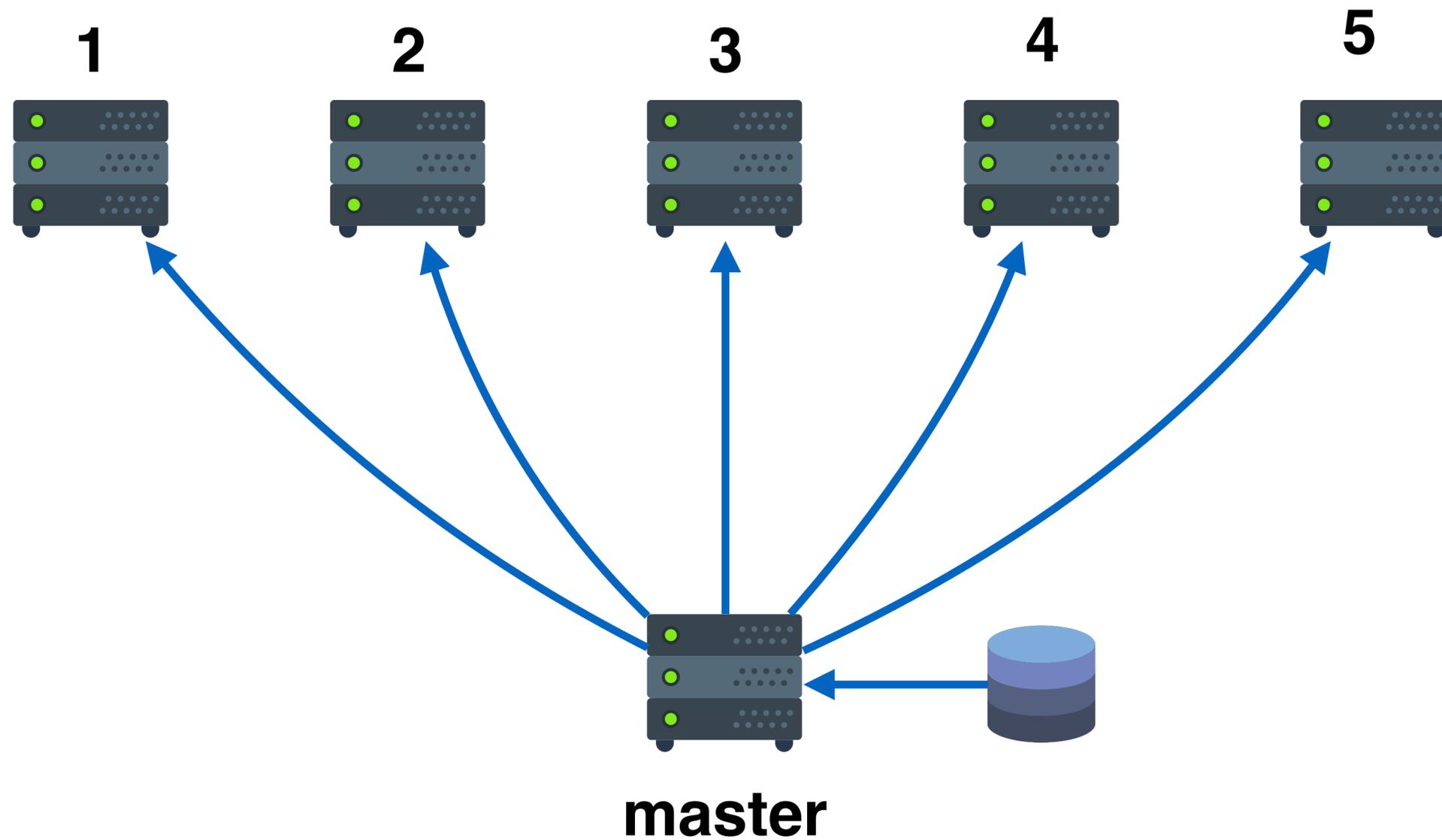
Параллельная адаптивная схема редукции размерности



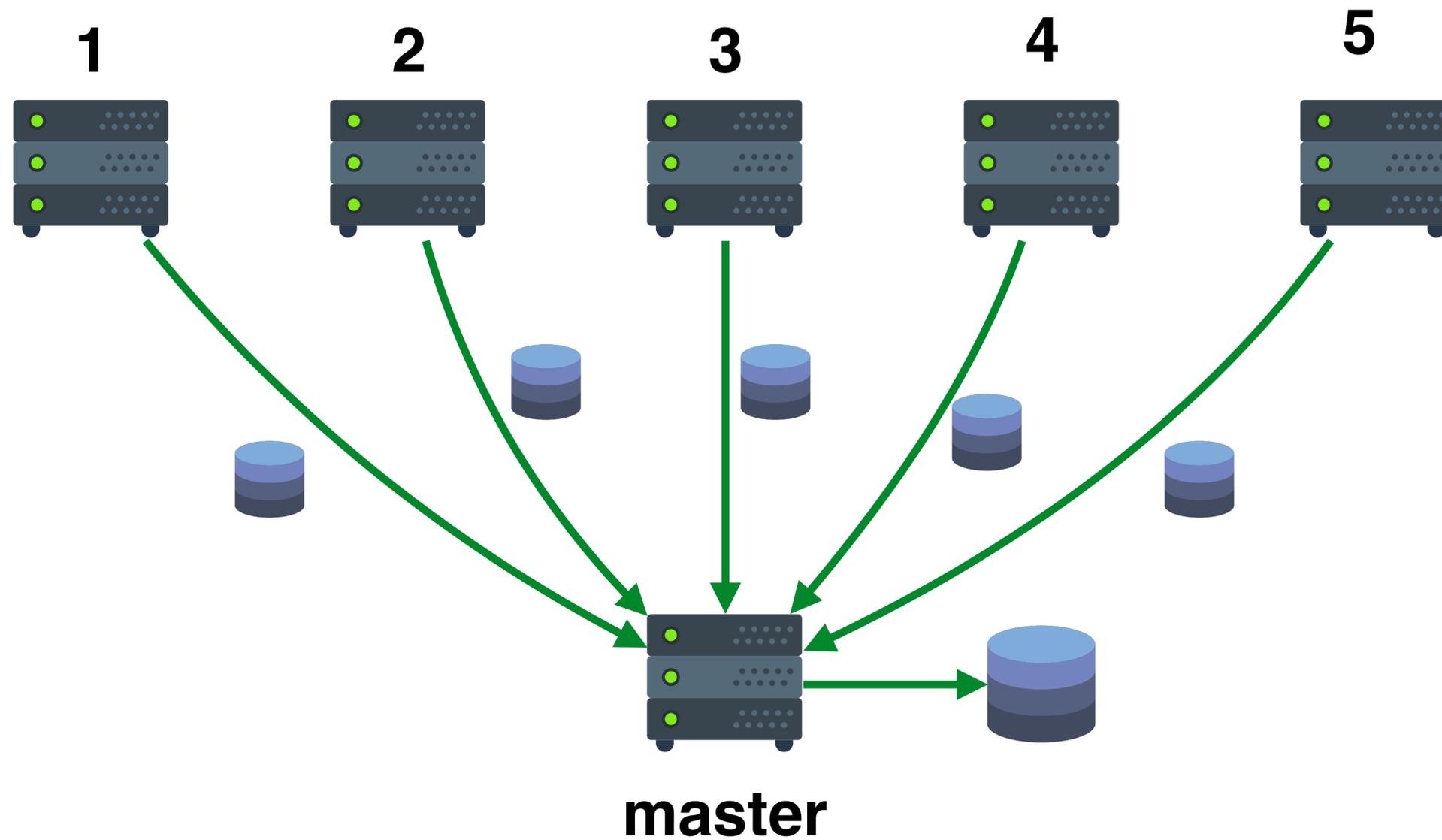
Master-slave схема вычислений



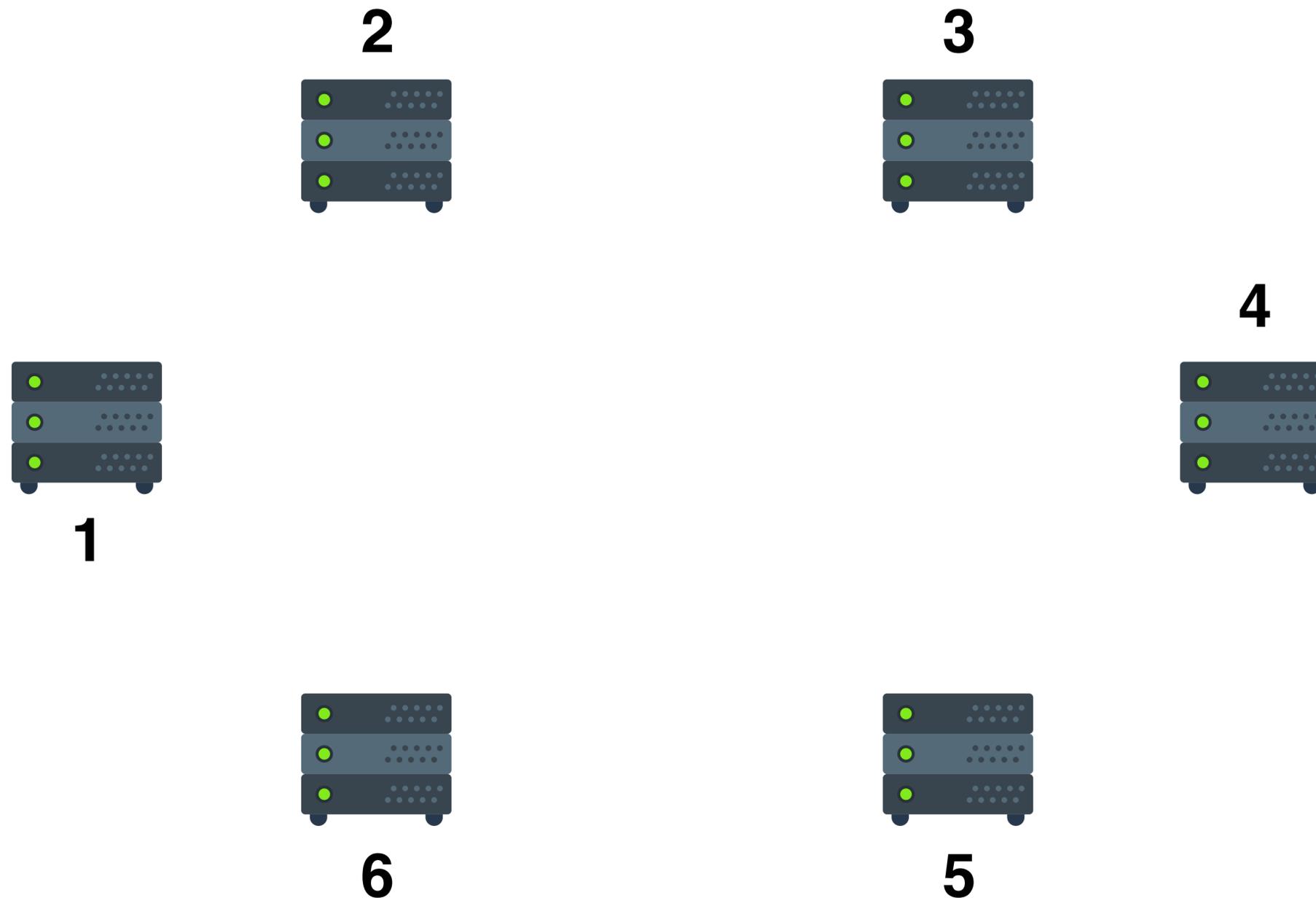
Master-slave схема вычислений



Master-slave схема вычислений



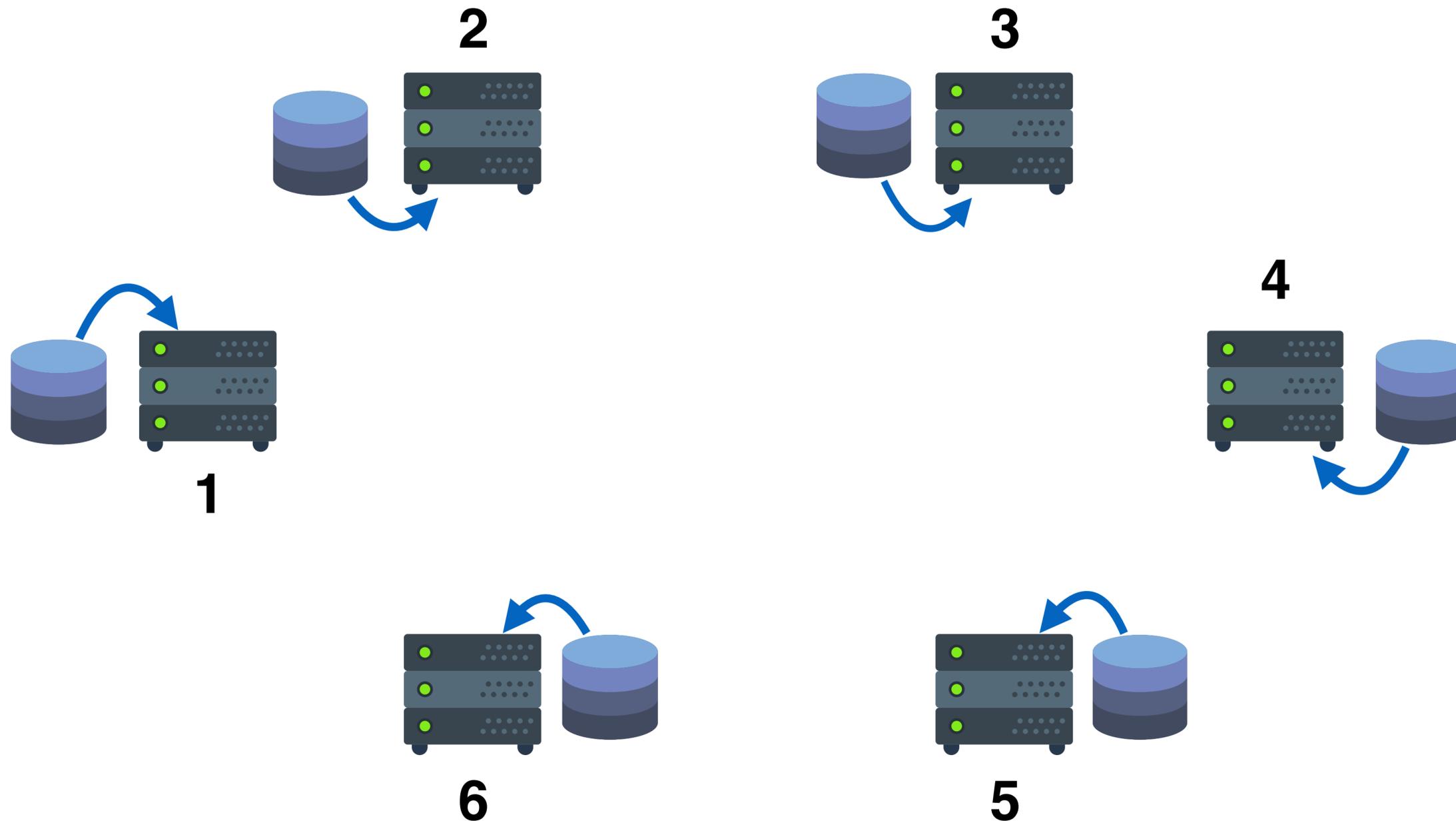
Децентрализованная схема распределённых вычислений



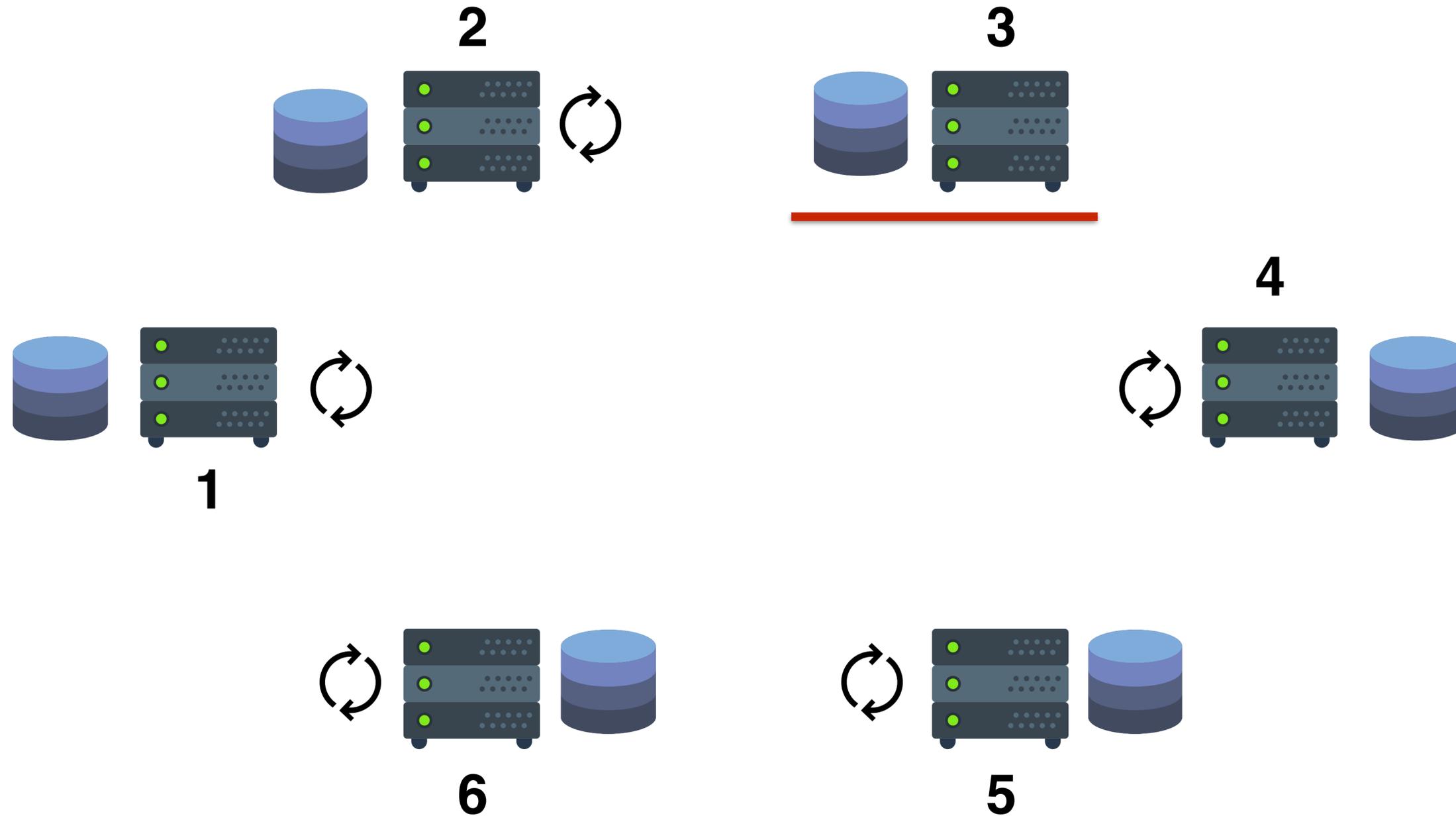
Децентрализованная схема распределённых вычислений



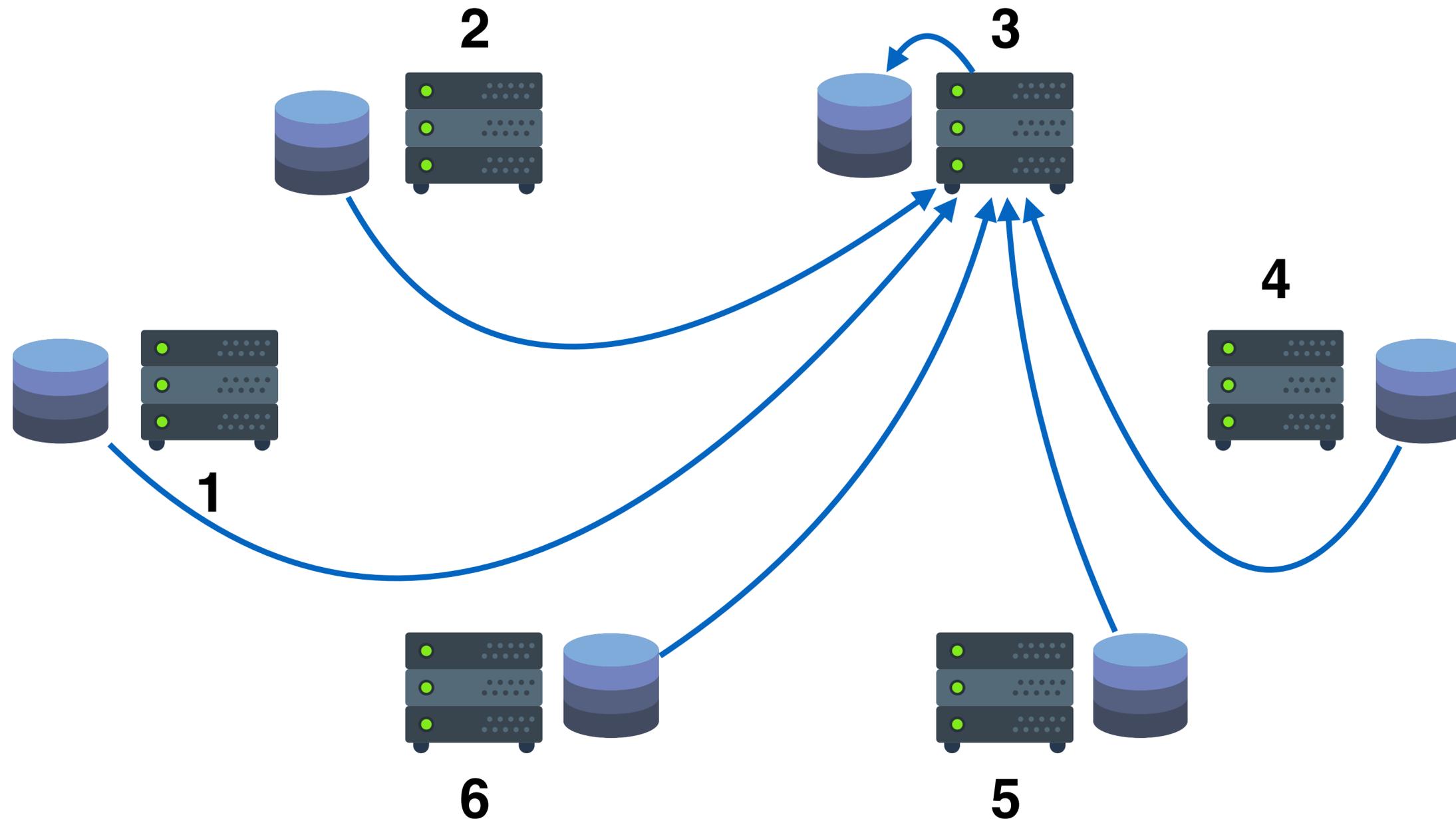
Децентрализованная схема распределённых вычислений



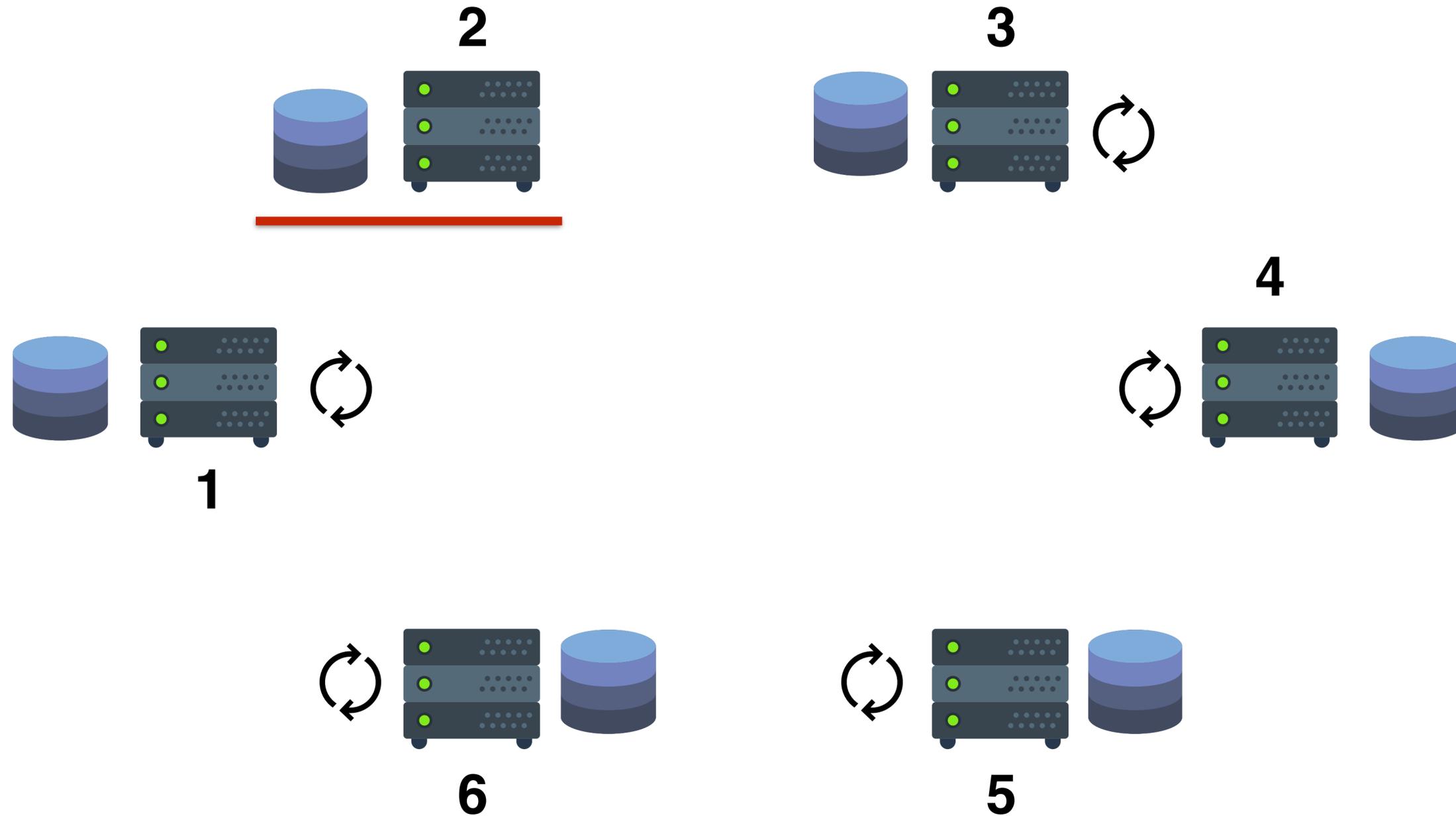
Децентрализованная схема распределённых вычислений



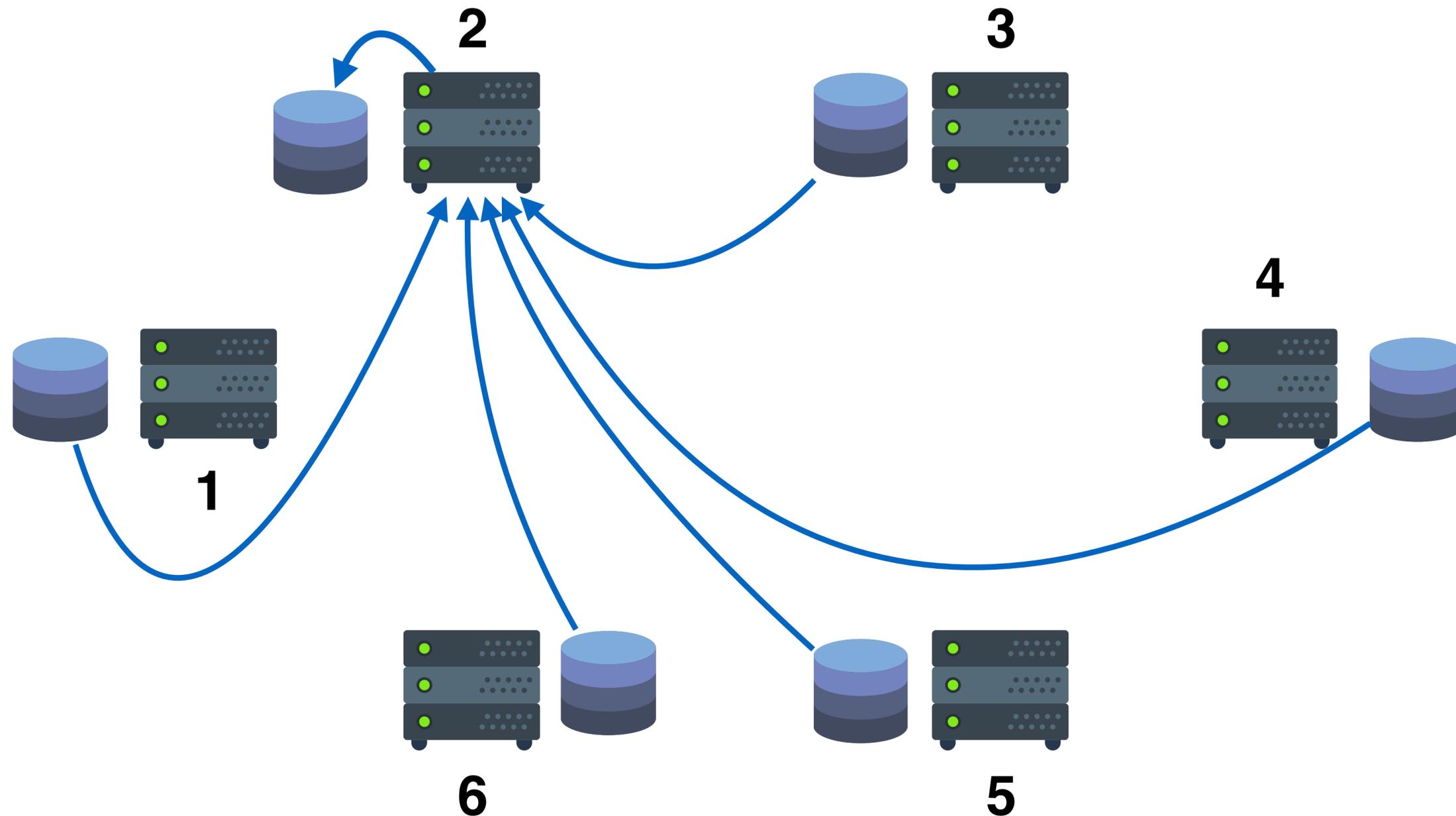
Децентрализованная схема распределённых вычислений



Децентрализованная схема распределённых вычислений



Децентрализованная схема распределённых вычислений



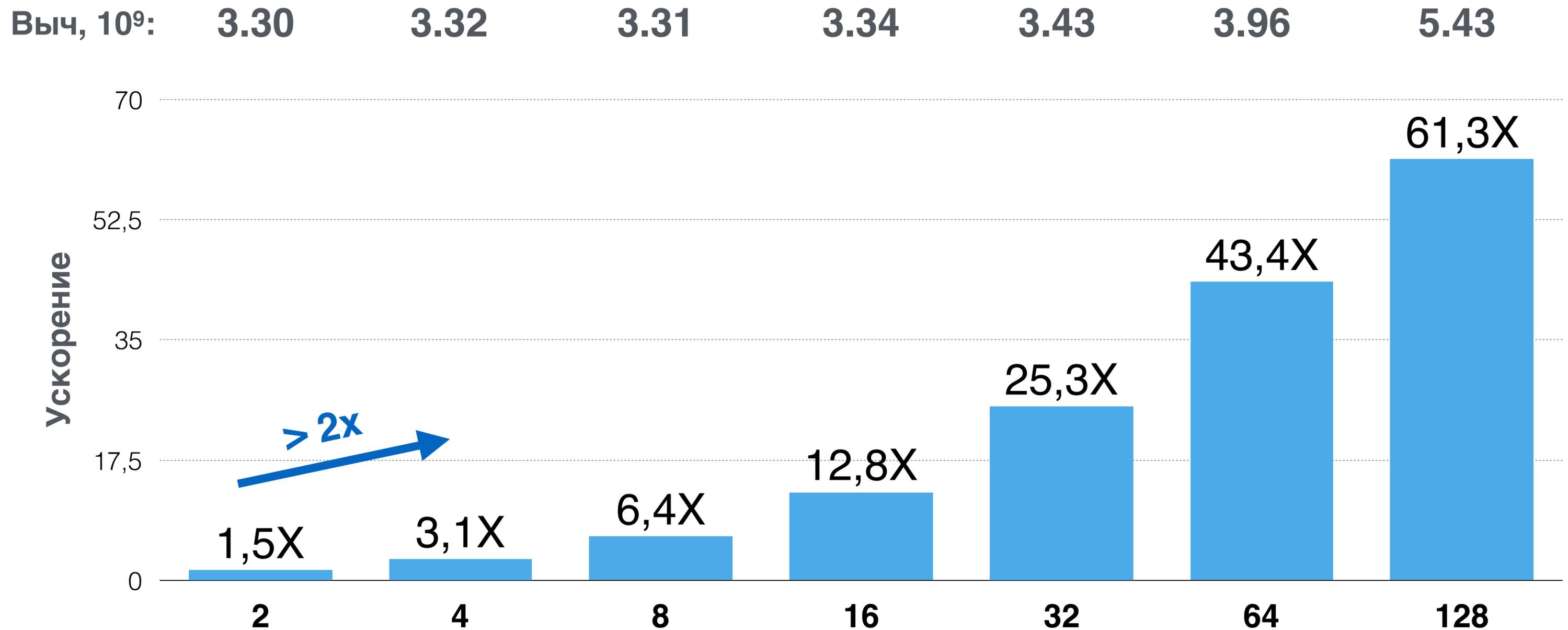
Вычислительные эксперименты

- Класс задач из 20 тестовых функций (GKLS*)
- Варьирование MPI-ранков от 1 до 128 (степени двойки)
- Hardware: 16 nodes
 - 4 x Intel® Xeon® E7-8890 v4 per node (Broadwell), 24 cores
 - Infiniband FDR
- Software: Intel® MPI 2017
 - Intel® C++ Compiler 2017

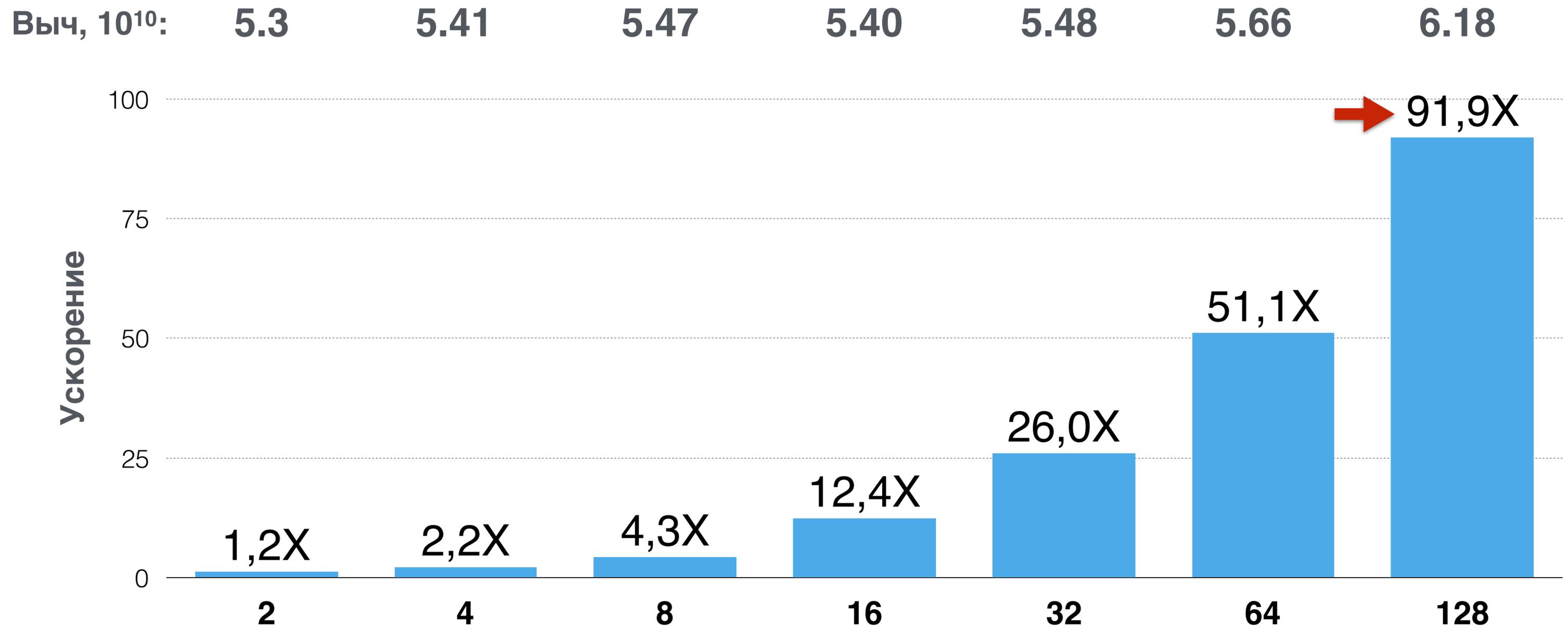
*Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization / M. Gaviano, D. E. Kvasov, D. Lera, Y. D. Sergeyev // ACM Transactions on Mathematical Software. — 2003. — Vol. 29



Ускорение по времени в зависимости от количества MPI-ранков (7D)



Ускорение по времени в зависимости от количества MPI-ранков (8D)



Оценка эффективности реализации

Ускорение по количеству вычислений целевой функции (trial-speedup)

$$\text{trial-speedup} = \frac{n_1}{n_p / P}$$

P — число MPI-ранков

n_1 — количество вычислений ЦФ на одном MPI-ранке

n_p — количество вычислений ЦФ на p MPI-ранках



Оценка эффективности реализации (7D)



Оценка эффективности реализации

$$\text{efficiency} = \frac{\text{time-speedup}}{\text{trial-speedup}} 100\%$$

