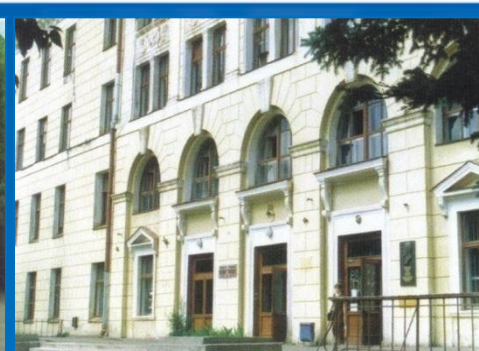
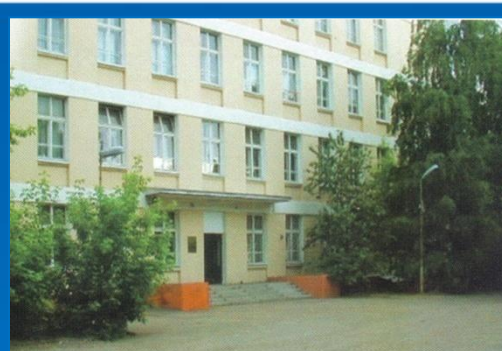




НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ





Russian Supercomputing Days

МОСКВА,
25-26 сентября 2017 г.

Подход к параллельному решению многокритериальных задач оптимизации с невыпуклыми ограничениями



Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Институт информационных технологий, математики и механики

Е.А. Козин,
В.П. Гергель

Содержание

- ❑ Задача многокритериальной оптимизации с невыпуклыми ограничениями
- ❑ Один из алгоритмов решения многокритериальных задач глобальной оптимизации
- ❑ Способ эффективного использования накопленной информации при решении задач многокритериальной оптимизации
- ❑ Результаты численных экспериментов

Постановка задачи многокритериальной оптимизации...

- Задача многокритериальной (или векторной) оптимизации (МКО) может быть определена следующим образом:

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \dots, f_s(y)) \rightarrow \min, \quad y \in Q,$$

$$Q = \{y \in D : g_i(y) \leq 0, 1 \leq i \leq m\},$$

$$D = \{y \in R^N : a_i \leq y_i \leq b_i, 1 \leq i \leq N\}$$

- $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ – вектор варьируемых параметров,
- N – размерность решаемой задачи,
- $f(y)$ – вектор-функция оптимизируемых критериев
- $g_i(y), 1 \leq i \leq m$ – набор функций задающих невыпуклые ограничения
- Q – область допустимых решений
- D – область поиска. (N-мерный гиперпараллелепипед)

- Используются два предположения

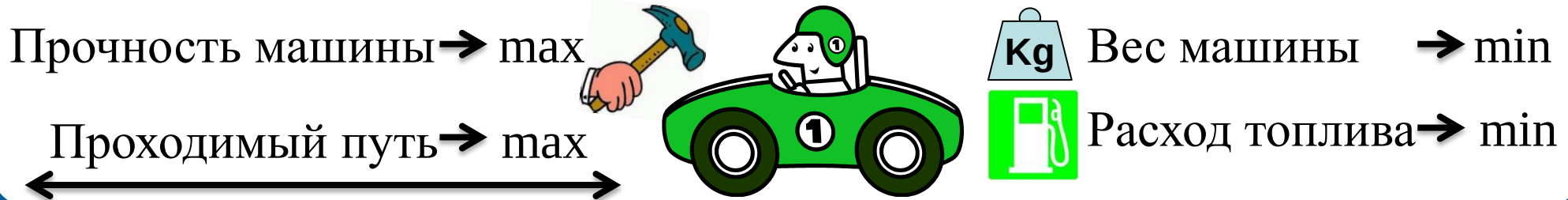
- Функции $f_i(y)$ и $g_i(y)$ удовлетворяют условию Липшица
- Вычисление значений функций $f_i(y)$ и $g_i(y)$ может потребовать большой объем вычислений.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации

- ❑ *Чрезвычайная сложность задач обусловлена:*
 - Критериев несколько и критерии противоречивы
 - Критерии сложно вычислимы
 - Функции критериев зависят от нескольких параметров («проклятие размерности»)
 - Функции соответствующие критериям многоэкстремальны
 - Функции задающие ограничения вызывают дополнительные сложности при поиске решения
- ❑ Задачи многокритериальной оптимизации(МКО) имеют широкое распространение в науке и технике.
 - Оптимальное размещение элементов на интегральных схемах,
 - проектирование летательных аппаратов,
 - разработка лекарственных препаратов,
 - разработка средств защиты,
 - поиск оптимального управления,
 - ...

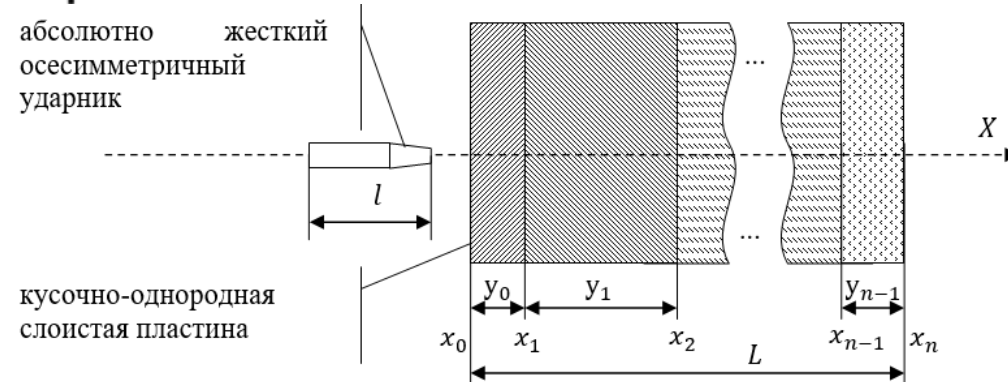
Примеры задач многокритериальной оптимизации...

□ Проектирование автомобиля



□ Проектирование защитных материалов

- Предельная баллистическая скорость $\rightarrow \max$
- Толщина материала $\rightarrow \min$
- Стоимость материала $\rightarrow \min$

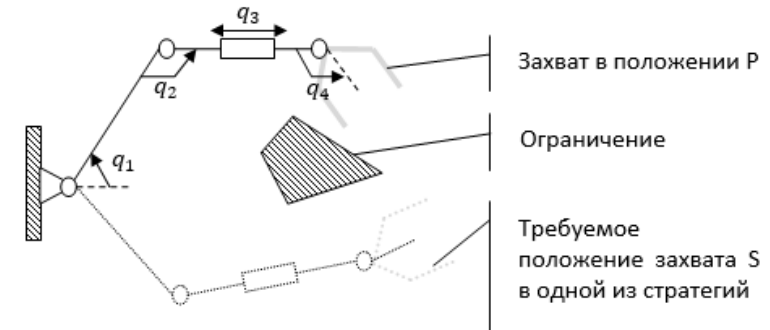


□ Проектирование на основе математической модели позволяет сократить расходы на реальные испытания

Примеры задач многокритериальной оптимизации

□ Планирование конфигураций робота-манипулятора

- Критерий $f(q) = \|P - S\|$, где $P = F(q)$
- Дополнительные критерии – например, минимизация кривизны...
- Функции близости секций манипулятора к препятствию являются ограничениями



□ Задача о виброзащите (защита от землетрясений)

- Модель может быть представлена системой дифференциальных уравнений с управлением
- Цель задачи – *поиск оптимального управления*
- Критерии:
 - Смещение объекта относительно начального положения $\rightarrow \min$
 - Деформация тела используемого при гашении колебаний $\rightarrow \min$

Задача многокритериальной оптимизации

- Модели, методы и программные средства решения задач оптимизации являются областью активных научных исследований.

- Можно выделить работы советских и российских ученых

Д.И. Батищева, Ф.П. Васильева, В.П. Гергеля, В.А. Гришагина, Ю.Г. Евтушенко, А.Г. Жилин斯卡са, В.Г. Карманова, А.Г. Коротченко, Ю.И. Неймарка, С.А. Пиявского, В.В. Подиновского, Я. Д. Сергеева, Р.Г. Стронгина, Ю.А. Флерова и др.

- Среди зарубежных ученых можно указать

Р. Брента, П. Пардалоса, Я. Пинтера, Х. Туя, П. Хансена, Р. Хорста и др.

ОСНОВЫ ПОДХОДА:

методы решения задач МКО

□ Подходы для решения задач МКО:

- **лексикографической оптимизации** (осуществляется то или иное упорядочивание критериев по важности)
- **итеративные методы** (в процесс выбора вариантов активно включается исследователь)
- **эволюционные алгоритмы** (основанных на имитации тех или иных природных явлений)
- ...

ОСНОВЫ ПОДХОДА:

1. Скаляризация векторного критерия

- В работе применяется **подход скаляризации** (применяются те или способы свертки набора частных критериев $f_i(y)$)

$$\min F(\lambda, y), y \in D$$

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ есть вектор коэффициентов (определяет значимость критериев)

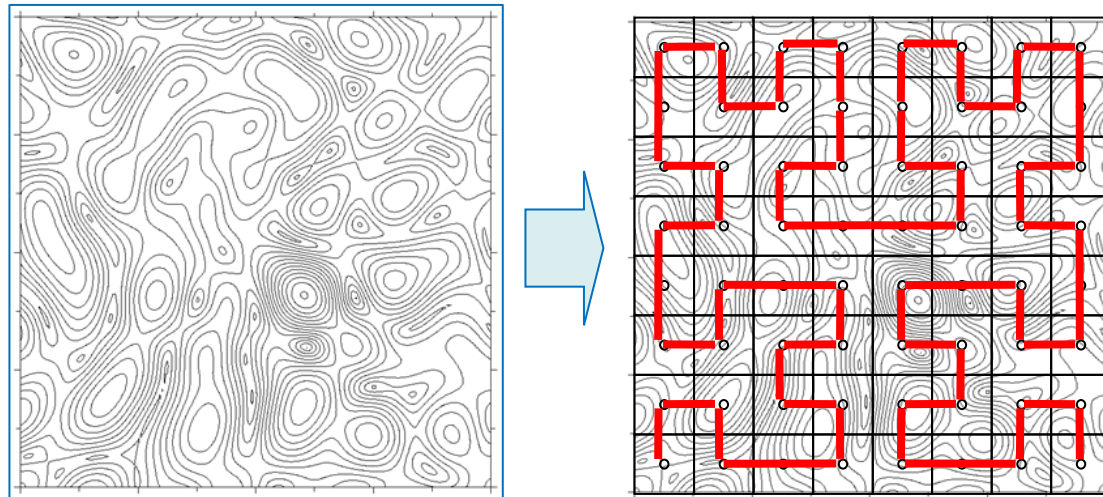
ОСНОВЫ ПОДХОДА:

2. Редукция размерности

- Для редукции размерности в разработанных алгоритмах используются *кривые* или *развертки* Пеано $y(x)$

$$\varphi(x^*) = F(\lambda, y(x^*)) = \min \{ F(\lambda, y(x)) : x \in [0, 1] \}$$

- $y(x)$ однозначно отображающие отрезок $[0, 1]$ на N -мерный гиперкуб D



- Удовлетворяет условию Гельдера

$$|F(\lambda, y(x')) - F(\lambda, y(x''))| \leq H |x' - x''|^{1/N}, \quad x', x'' \in [0, 1] \quad H = 4L\sqrt{N}$$

ОСНОВЫ ПОДХОДА:

3. Глобальная оптимизация...

- ❑ Основные подходы учета ограничений:
 - Метод штрафных функций
 - Индексная схема учета ограничений
- ❑ В работе используется индексная схема учета ограничений
 - Подход позволяет вычислять значения критерия реже чем значения ограничений
 - Как правило вычисление критерия более трудоемкое

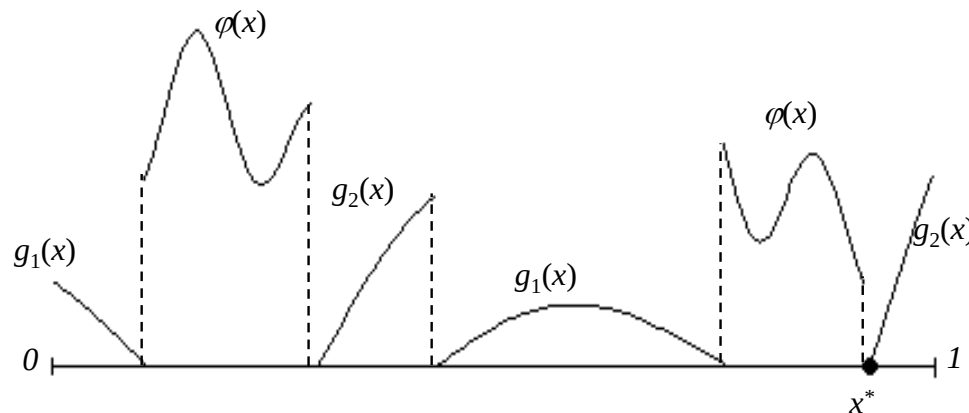
ОСНОВЫ ПОДХОДА:

3. Глобальная оптимизация...

Введем классификацию точек x из области поиска $[0, 1]$ с помощью *индекса* $\nu = \nu(x)$, где $\nu - 1$ есть число ограничений, которые выполняются в этой точке. Указанный индекс ν определяется условиями

$$g_j(x) \leq 0, 1 \leq j \leq \nu - 1, g_\nu(x) > 0,$$

где последнее неравенство несущественно, если $\nu = m + 1$.



«Индексная» функция $f(x)$

Данная классификация порождает функцию

$$f(x) = g_\nu(x), \quad \nu = \nu(x),$$

определенную и вычислимую всюду в $[0, 1]$

ОСНОВЫ ПОДХОДА:

3. Глобальная оптимизация...

Характеристическая схема алгоритма:...

Первые два испытания: $x^0=0$ и $x^1=1$.

1. Упорядочить точки по координате: $0 = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_k = 1$.
2. Классифицировать точки по индексу, т.е. построить множества $I_\nu = \{i: 1 \leq i \leq k, \nu = \nu(x_i)\}$, $1 \leq \nu \leq m+1$.
3. Вычислить текущие нижние оценки μ_ν для априори неизвестных констант Гельдера H_ν , $1 \leq \nu \leq m+1$,

$$\mu_\nu = \max \left\{ |z_i - z_j| / \sqrt[n]{(x_i - x_j)}, i, j \in I_\nu, i > j \right\}$$

ОСНОВЫ ПОДХОДА:

3. Глобальная оптимизация...

Характеристическая схема алгоритма:...

4. Для каждого (x_{i-1}, x_i) , $1 < i \leq k$, вычислить характеристику $R(i)$,

$$R(i) = \begin{cases} \rho_i + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{r_v^2 \mu_v^2 \rho_i} - 2 \frac{(z_i + z_{i-1} - 2z_v^*)}{r_v \mu_v}, & \nu = \nu(x_{i-1}) = \nu(x_i), \\ 2\rho_i - 4 \frac{(z_i - z_v^*)}{r_v \mu_v}, & \nu = \nu(x_i - 1) < \nu(x_i), \\ 2\rho_i - 4 \frac{(z_{i-1} - z_v^*)}{r_v \mu_v}, & \nu = \nu(x_{i-1}) > \nu(x_i), \end{cases}$$
$$\rho_i = \sqrt[N]{x_i - x_{i-1}},$$

5. Определить интервал с максимальной характеристикой

$$R(t) = \max\{R(i): 1 \leq i \leq k\}.$$

ОСНОВЫ ПОДХОДА:

3. Глобальная оптимизация...

Характеристическая схема алгоритма:...

6. Провести очередное испытание во внутренней точке интервала (x_{t-1}, x_t)

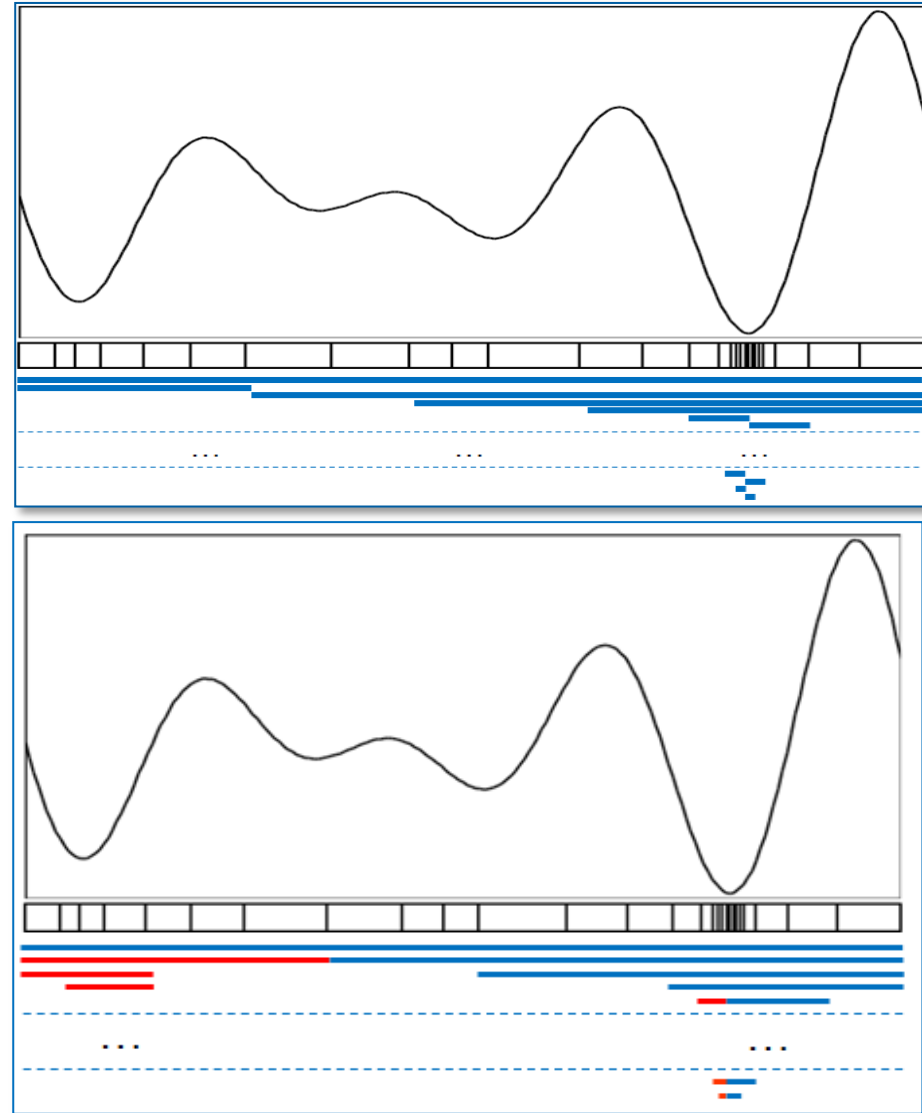
$$x^{k+1} = \begin{cases} \frac{x_t + x_{t-1}}{2}, & v(x_{t-1}) \neq v(x_t), \\ \frac{x_t + x_{t-1}}{2} + \text{sign}(z_t - z_{t-1}) \frac{1}{2r_v} \left[\frac{|z_t - z_{t-1}|}{\mu_v} \right]^N, & v = v(x_{t-1}) = v(x_t). \end{cases}$$

7. Проверить условие остановки: $\rho_i \leq \varepsilon$,

где ε – заданная точность поиска глобального минимума.

Параллельный метод решения задач глобальной оптимизации

1. Сортируем точки испытаний
 $0 = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_k = 1,$
2. Для каждого (x_{i-1}, x_i) вычислить значения характеристик $R(i)$
3. Сортируем интервалы по убыванию характеристик, берем p интервалов $R(t_1) \geq R(t_2) \geq \dots \geq R(t_p)$
4. **Проводим p испытаний параллельно**
 $(x_{t_1-1}, x_{t_1}), (x_{t_2-1}, x_{t_2}), \dots, (x_{t_p-1}, x_{t_p})$
5. Критерий остановки:
 $x_{t_i} - x_{t_i-1} \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq p$



Ускорение вычислений на основе повторного использования поисковой информации...

- ❑ Решение задач МКО может потребовать значительного объема вычислений.
 - Основная проблема – каждая смена набора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ приводит к новой задаче многоэкстремальной оптимизации.
- ❑ Повышение эффективности вычислений может быть обеспечено только при полном использовании всей поисковой информации, получаемой в процессе вычислений.

Ускорение вычислений на основе повторного использования поисковой информации

□ Матрица поисковой информации (МПИ)

$$\Omega_k = \left\{ \left(y^i, f^i = f(y^i) \right)^T : 1 \leq i \leq k \right\}$$

□ Матрица состояния поиска (МСП)

$$A_k = \{ (x_i, z_i, l_i)^T : 0 \leq i \leq k+1 \}$$

$$z_i = \varphi(x_i) = F(\lambda, y(x_i)), 1 \leq i \leq k$$

- При смене постановки задачи МСП восстанавливается из МПИ путем простых арифметических операций!
- В предельном случае для решения очередной задачи достаточно провести всего несколько итераций!

Ускорение вычислений на основе повторного использования поисковой информации



Результаты численных экспериментов...

❑ Первая серия экспериментов

$$f_1(y) = (y_1 - 1)y_2^2 + 1, f_2(y) = y_2, 0 \leq y_1, y_2 \leq 1.$$

❑ Сравнивались 5 методов

- Метод Monte-Carlo (MC),
- Генетический алгоритм SEMO из библиотеки PISA,
- Метод Non-Uniform Coverage (NUC),
- Метод Bi-objective Lipschitz Optimization (BLO),
- Представленный алгоритм (ПМОАГП)

❑ Сравнение по индексам

- HV – полнота покрытия Парето границы (больше лучше)
- DU – равномерность покрытия Парето границы (меньше лучше)

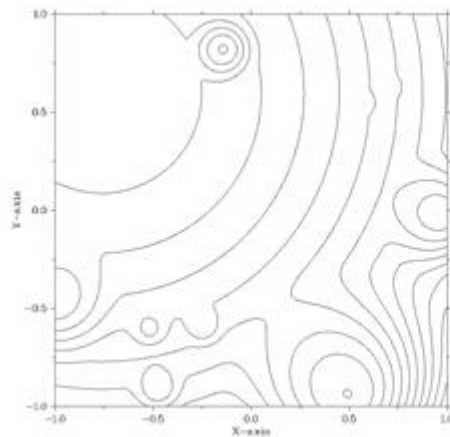
Результаты численных экспериментов...

□ Сравнения методов по индексам HV и DU:

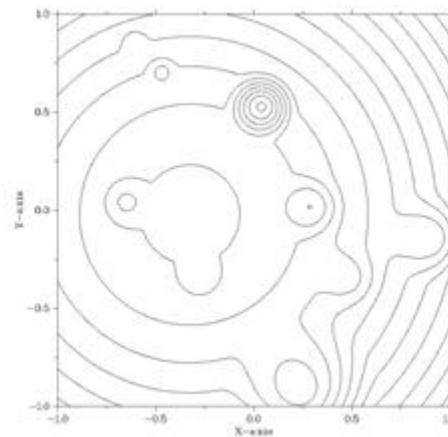
Метод	Итераций	PDA points	HV	DU
MC	500	67	0.300	1.277
SEMO	500	104	0.312	1.116
NUC	515	29	0.306	0.210
BLO	498	68	0.308	0.175
ПМОАГП	370	100	0.316	0.101

Результаты численных экспериментов...

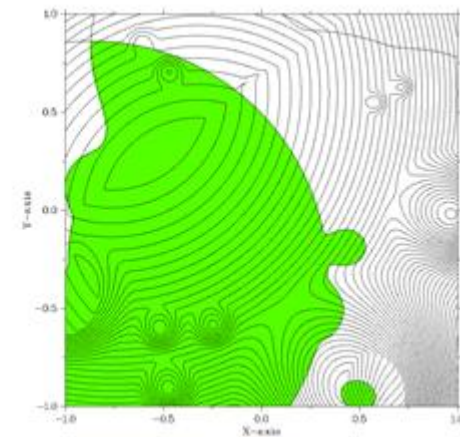
- ❑ Во второй и третьей серии экспериментов использовались задачи из генератора GKLS



(a)



(b)



(c)

- ❑ Генератор позволяет генерировать задачи глобальной оптимизации произвольной размерности

Результаты численных экспериментов...

- ❑ Решалась серия из 100 задач многокритериальной оптимизации
- ❑ Задачи содержали 2 критерия и 2 варьируемыми параметрами

Кол-во потоков	Поисковая информация				S1	S2
	Не используется		Используется			
	Кол-во итераций	Решеных задач	Кол-во итераций	Решены х задач		
1	26191.8	88%	1420.5	93%	18.4	18.4
2	12146.1	85%	653.3	90%	18.6	40.1
5	5019.3	85%	285.7	91%	17.6	91.7
10	2141.5	85%	152.5	93%	14.0	171.8
25	1022.4	88%	88.6	94%	11.5	295.6

Результаты численных экспериментов...

- ❑ Решалась серия из 100 задач многокритериальной оптимизации
- ❑ Задачи содержали 2 критерия и 4 варьируемыми параметрами

Кол-во потоков	Поисковая информация				S1	S2
	Не используется		Используется			
	Кол-во итераций	Решенных задач	Кол-во итераций	Решены х задач		
1	49 988 246.5	91%	6 153 261.0	90%	8.1	8.1
2	20 369 550.2	90%	2 400 575.1	89%	8.5	20.8
5	8 228 684.5	90%	709 672.4	92%	11.6	70.4
10	5 582 125.8	92%	702 522.4	91%	7.9	71.2
25	1 704 359.8	91%	204 342.8	90%	8.3	244.6

Литература

1. Gergel V.P., et al. High Performance Computing in Biomedical Applications //Procedia Computer Science, 2013. Vol.18. P. 10—19.
2. Strongin R.G., Sergeyev Ya.D. Global optimization with non-convex constraints. Sequential and parallel algorithms //Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 2000.
3. Strongin R.G., Gergel V.P. Parallel computing for globally optimal decision making //Lecture Notes in Computer Science, 2003. Vol.2763. P. 76—88.
4. Strongin R.G., Gergel V.P. Parallel computing for globally optimal decision making on cluster systems //Future Generation Computer Systems, 2005. Vol.21. P. 673—678
5. Barkalov K., Gergel V.P. Multilevel scheme of dimensionality reduction for parallel global search algorithms // OPT-i 2014. An International Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization (Kos Island, Greece, 4–6 June 2014), 2014. P. 2111–2124.
6. Gergel V.P., Grishagin V.A., Israfilov R. Local Tuning in Nested Scheme of Global Optimization. Procedia Computer Science, 2015. Vol. 51. P. 865–874.
7. Gergel V.P., Kozinov E.A. Accelerating Parallel Multicriterial Optimization Methods Based on Intensive Using of Search Information. Procedia Computer Science Vol. 108, 2017, P. 1463–1472
8. Gergel V., Kozinov E. Parallel Computing for Time-Consuming Multicriterial Optimization Problems. In: Malyshkin V. (eds) Parallel Computing Technologies. PaCT 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10421., 2017. Springer, Cham

Контакты

□ д.т.н., профессор, директор ИТММ,
Гергель Виктор Павлович
gergel@unn.ru

□ ассистент каф. МОСТ ИТММ
Козинев Евгений Александрович
evgeny.kozinov@itmm.unn.ru

Спасибо за внимание!

Вопросы?